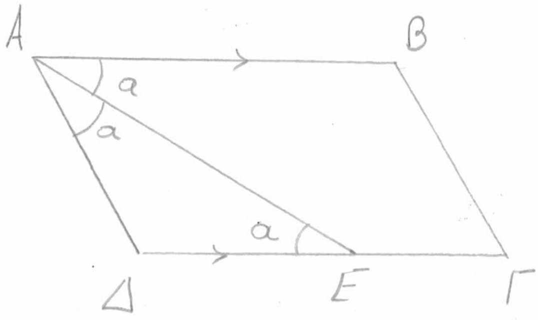
5)



Έστω $B\hat{A}E = \alpha$,

$A\hat{E}\Delta = \alpha$ (εντός εναλλάξ)

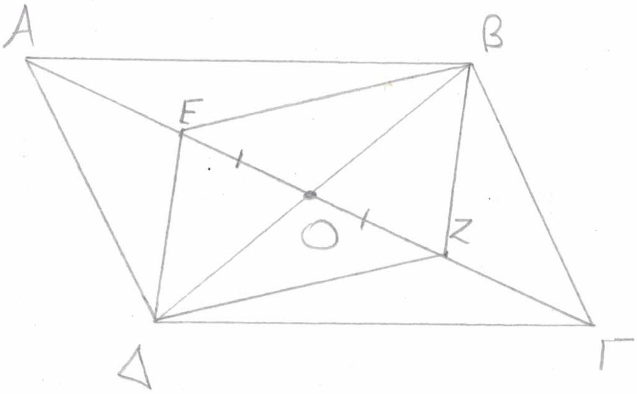
=> $A\hat{\Delta}E$ τρίγωνο είναι ισοσκελές (οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες)

=> $A\Delta = \Delta E$

$A\Delta = B\Gamma$ (απέναντι πλευρές παραλλ. είναι ίσες)

$\Delta E = B\Gamma$

6



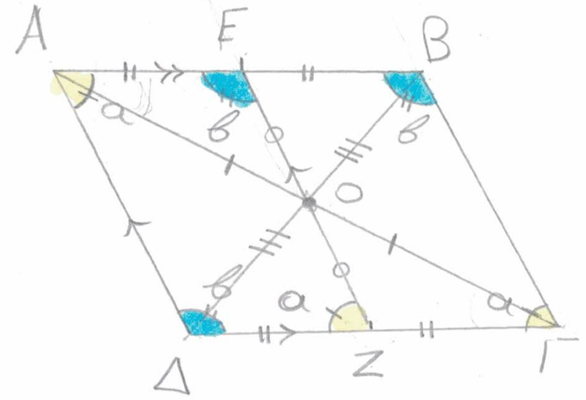
$EO = OZ$ (δεδ.)

$BO = O\Delta$ (διαγώνιοι παραλλ. διχοτομούνται)

=> Για το τετραπλ. ΒΕΔΖ έχουμε ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται

=> ΒΕΔΖ είναι παραλλ.

7)



α)

Έστω $B\hat{Γ}Z = α$

$B\hat{A}Δ = α$ (απέναντι γωνίες παρ. είναι ίσες)

$E\hat{Z}Δ = α$ (εντός, εκτός κι επί τ' αυτά), $\Rightarrow B\hat{A}Δ = E\hat{Z}Δ = α$ (1)

Έστω $E\hat{B}Γ = β$

$A\hat{E}Z = β$ (εντός, εκτός κι επί τ' αυτά)

(2) $A\hat{Δ}Z = A\hat{B}Γ = β$ (απέναντι γων. παρ. είναι ίσες)

Από το (1) και (2) προκύπτει ότι στο τετράπλευρο ΑΕΖΔ, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες => ΑΕΖΔ είναι παραλ/μο.

β) $\overset{\triangle}{AEO}$ και $\overset{\triangle}{ΓOZ}$ είναι ίσα:

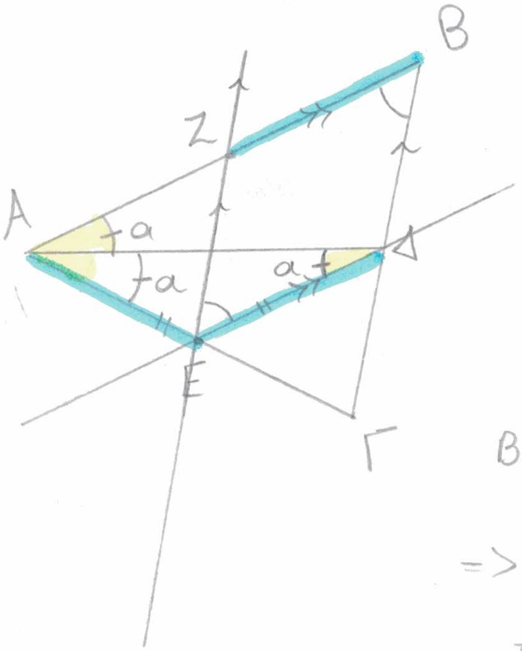
$$\left.\begin{aligned} AE &= ZΓ \quad Π \\ AO &= OΓ \quad Π \\ O\hat{Γ}Z &= E\hat{A}O \quad Γ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{EO = OZ}, \Rightarrow O \text{ μέσο } EZ$$

=> ΒΔ, και ΑΓ τέμνονται στο Ο (κέντρο παρ. ΑΒΓΔ)

Ο σημείο πάνω στην ΕΖ (μέσο)

} ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν στο Ο.

8



$AE = BZ$

• Έστω $B\hat{A}\Delta = \alpha \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \alpha$ (ΑΔ διχοτόμος

• Τετράπλευρο ΒΖΕΔ είναι παραλλ.
(απέναντι πλευρές παραλλ.. δεδ)

$BA\Delta = A\hat{\Delta}E = \alpha$ (εντός εναλλάξ)

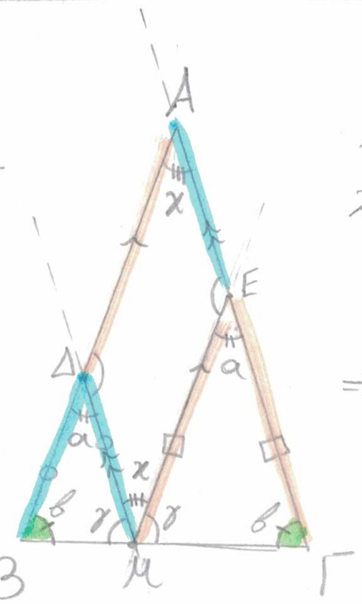
$\Rightarrow$ Τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AE = E\Delta \\ BZ = E\Delta \text{ (απέν. πλευρές παρ.)} \end{array}\right\} \Rightarrow AE = BZ$$

9

$AB = B\Gamma$

ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο



Στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, στο σημείο Μ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 2\gamma + \chi = 180 \text{ (παραπλ.)} \\ 2\beta + \chi = 180 \text{ (άθρ. γων. τρ. στο ΑΒΓ τριγ.)} \end{array}\right\}$$

Σύστημα εξισώσεων:

$\chi = 180 - 2\gamma$

$2\beta + \cancel{180} - 2\gamma = \cancel{180}$

$\frac{2\beta}{2} = \frac{2\gamma}{2} \Rightarrow \hat{\beta} = \hat{\gamma}$

$\Rightarrow B\hat{\Delta}M$ ισοσκελές $\Rightarrow B\Delta = \Delta M$

$B\Delta = \underbrace{\Delta M = AE}$

$\Rightarrow E\hat{\Gamma}M$ ισοσκελές $\Rightarrow EM = E\Gamma$ απέναντι πλευρές παρ. είναι ίσες

$\Rightarrow EM = E\Gamma = A\Delta$

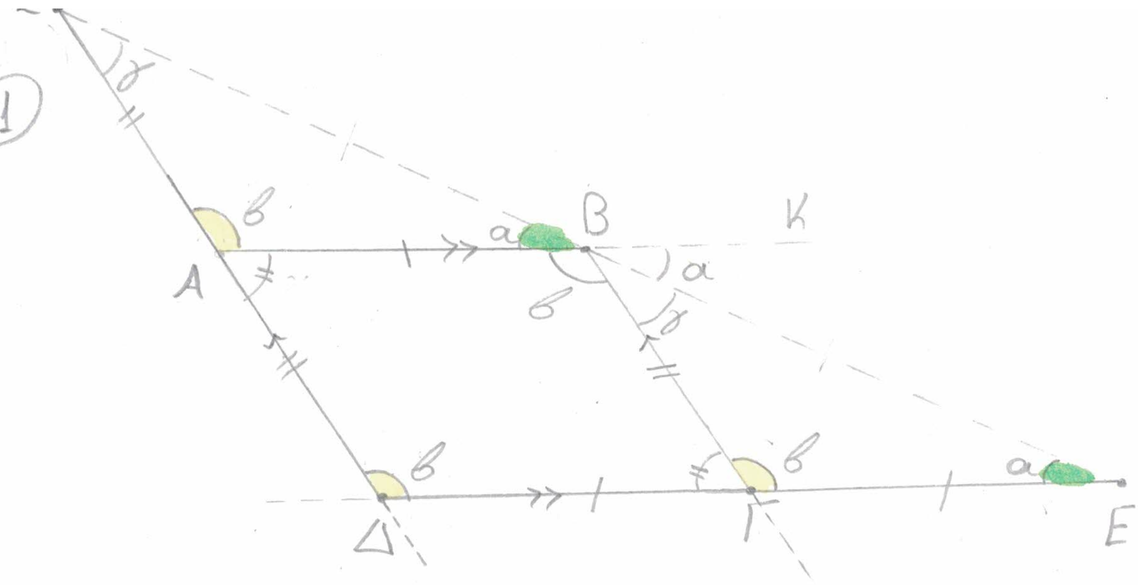
$\Delta M = AE = B\Delta$

$ME = E\Gamma = A\Delta$

$\Delta M + ME = \underbrace{A\Delta + \Delta B}_{AB}$

• Μ τυχαίο σημείο στην ΒΓ)

(11)



$\overset{\triangle}{ZBA}$ ίσο με $\overset{\triangle}{BEΓ}$: $\underbrace{AB = ΔΓ}_{\text{αντ. πλ. παρ.}} = ΓE$ Π

$\underbrace{Z\hat{A}B = Z\hat{Δ}Γ = B\hat{Γ}E}_{\text{εντός εκτός κι επί τ' αυτά}}$ Γ

$\overbrace{ZA = AΔ}^{\text{δεδ}}$ $= BΓ$ Π

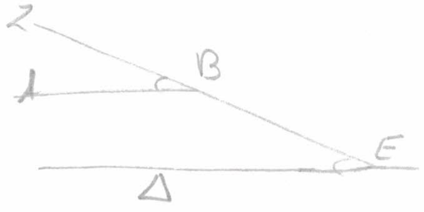
$\underbrace{AΔ = BΓ}_{\text{αντ. πλ. παρ}}$

$\Rightarrow ZB = BE$
$Z\hat{B}A = B\hat{E}Γ$

$ZB = BE$

$\underbrace{Z\hat{B}A = B\hat{E}Γ,\ AB \parallel ΔE}_{}$ ⇒ Z,B,E συνευθειακά
$α = α$ δεδ $α + β + γ = 180°$

ίση γωνία που σχηματίζεται πάνω σε δύο παράλληλες



ή

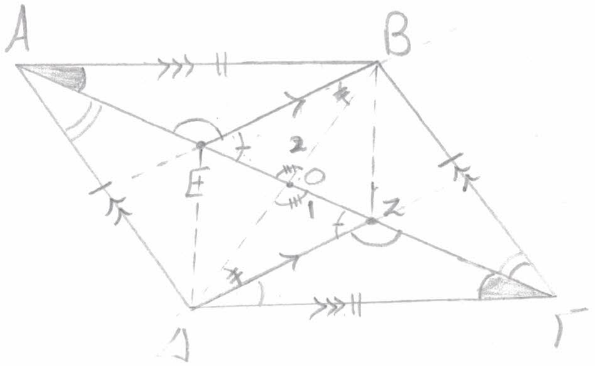
$K\hat{B}E = B\hat{E}Γ = α$

$K\hat{B}E = Z\hat{B}A$ κατακορ.

$\Rightarrow γ + β + α = 180°$

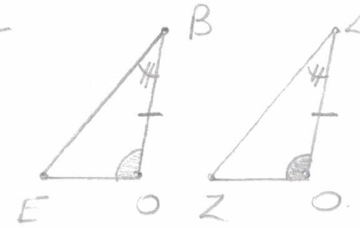
συνευθειακά

(10)



$OB = O\Delta$

$\overset{\Delta}{EBO}$ είναι ίσο με $\overset{\Delta}{ZO\Delta}$:



$BO = O\Delta$ (O κέντρο ΑΒΓΔ παρ)

$E\hat{B}O = O\hat{\Delta}Z$ (εντός εναλ.)

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (κατακ.)

$\overset{\Delta}{EBO} = \overset{\Delta}{Z\Delta O}$ => όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

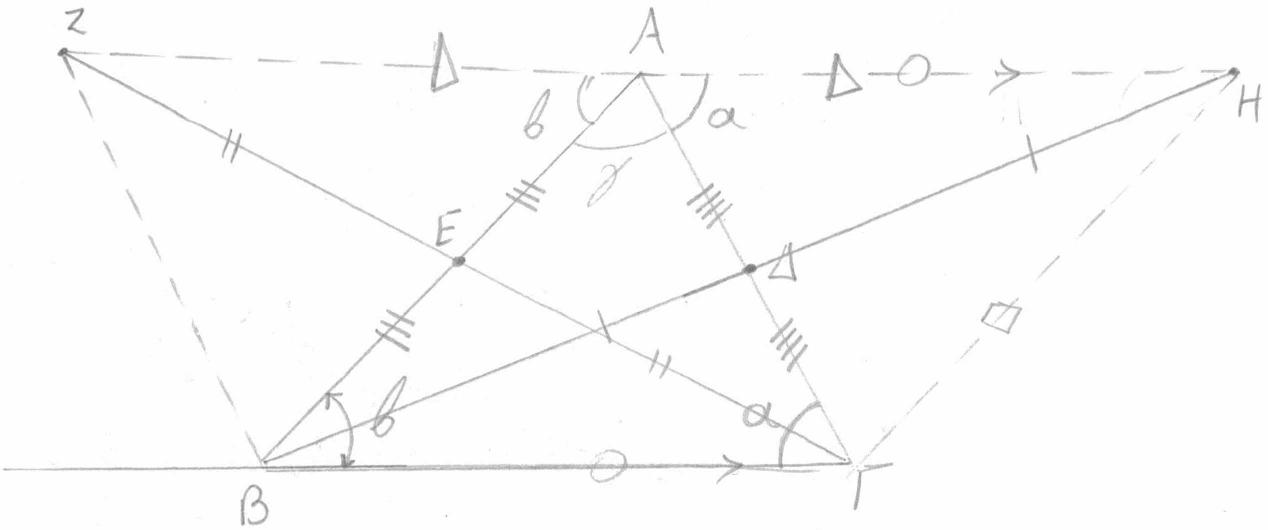
$OB = O\Delta$

$EO = OZ$

} ΕΒΖΔ παραλλ. επειδή οι διαγ. διχοτ.

=> $\Delta E // BZ$

12



ΑΒΓΗ παρ. (οι διαγ. διχοτ) ΑΒ = ΗΓ

ΑΗ = ΒΓ (1) ΑΓ = ΖΒ

ΖΑΓΒ παρ. (Οι διαγ. διχοτ)

=> ΒΓ = ΖΑ (2)

από (1) και (2) προκύπτει:

$$\underbrace{\begin{array}{l} AH = B\Gamma \\ ZA = B\Gamma \end{array}}_{AH = ZA}$$

$\alpha + \gamma + \beta = 180°$ (άθροισμ. γων. τριγ)

$\beta = A\hat{B}\Gamma$ (εντός εναλλ. στο παρ ΖΑΓΒ)

$\alpha = A\hat{\Gamma}B$ (εντός εναλλ. στο παρ ΑΒΓΗ παρ.)