

ΘΕΜΑ 1^ο Να βρείτε το π.ο των συναρτήσεων
 α) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x+6}}{\sqrt{3-x}}$, β) $g(x) = \frac{7x^2+2}{|x+3|-2}$

ΘΕΜΑ 2^ο Να βρείτε το σύνολο τιμών της συναρτήσεως

$$f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \in [-3,0] \\ 2x+1, & x \in (0,7] \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3^ο Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x-5}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-x-2}$.
 Να εξετάσετε αν $f=g$. Αν $f \neq g$ να προσδιορίσετε το
 ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f(x)=g(x)$.

ΘΕΜΑ 4^ο Αν $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$, $g(x) = \frac{x+3}{7x}$, να ορίσετε τις $f \cdot g$, $\frac{g}{f}$.

ΘΕΜΑ 5^ο Αν $f: [-a, 3] \rightarrow [-4, +\infty)$ με $f(x) = x^2 - 6x + 5$ να
 δείξετε ότι είναι αντιστροφική και αμοιβαίως
 να ορίσετε την f^{-1}

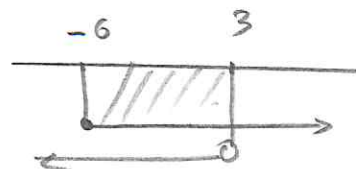
ΘΕΜΑ 6^ο Τα σημεία $A(4, -5)$, $B(-5, -1)$, $\Gamma(-1, 4)$ είναι σημεία
 της γραμμικής παράστασης της $h(x)$. Αν υπάρχει
 η αντίστροφή της $h(x)$ να βρείτε:

α) $h^{-1}(-5)$, β) $h^{-1}(4)$

ΘΕΜΑ 7^ο Δίνονται: $f(x) = \sqrt{4-x}$, $g(x) = x-1$. Να εξετάσετε
 αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ ή $g \circ f$. Αν
 ορίζονται να βρείτε τον τύπο τους και το
 πεδίο ορισμού τους

Αγίου Νικολάου - 2018-19

1. α) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x+6}}{\sqrt{3-x}}$, πρέπει ① $x+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -6$ }
 ② $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$ }



Απο $D_f = [-6, 3)$

β) $g(x) = \frac{7x+2}{|x+3|-2}$, πρέπει $|x+3|-2 \neq 0 \Rightarrow |x+3| \neq 2 \Rightarrow x+3 \neq \pm 2$
 $\Rightarrow x+3 \neq 2 \Rightarrow x \neq -1$
 $\Rightarrow x+3 \neq -2 \Rightarrow x \neq -5$ } $\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-5, -1\}$

2 α) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \in (-3, 0] \\ 2x+1, & x \in (0, 7] \end{cases}$ ① $y = 4-x^2 \Rightarrow x^2 = 4-y \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-y}$
 με $x < 0$

$x = -\sqrt{4-y} \Rightarrow -3 < -\sqrt{4-y} \leq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq \sqrt{4-y} < 3 \Rightarrow 0 \leq 4-y < 9 \Rightarrow -4 \leq -y < 5 \Rightarrow -5 < y \leq 4 \Rightarrow y \in (-5, 4]$

② $y = 2x+1 \Rightarrow 2x = y-1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$ με $x \in (0, 7]$
 $\Rightarrow 0 < \frac{y-1}{2} \leq 7 \Rightarrow 0 < y-1 \leq 14 \Rightarrow 1 < y \leq 15 \Rightarrow y \in (1, 15]$

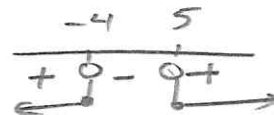
Απο το συνολο τιμων της f είναι η ένωση των 2 διαστημάτων $\Rightarrow D_f = (-5, 15]$

3. $f(x) = \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{x^2-x-20}$

Για την f : πρέπει ① $x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ και ② $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq +5$
 $\Rightarrow D_f = [5, +\infty)$



Για την g : πρέπει $x^2-x-20 \geq 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) \geq 0$
 $\Rightarrow D_g = (-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$



Αρα απον $D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

Οψω) $f(x) = \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x-5} = \sqrt{(x+4)(x-5)} = \sqrt{x^2-x-20} = g(x) \quad \forall x \in [5, +\infty)$

4. $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$, $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$, $g(x) = \frac{x+3}{7x}$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$\rightarrow (f-g)(x)$: ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 0\}$ με $(f-g)(x) = f(x) - g(x) =$

$= \frac{x^2+x-6}{x+3} - \frac{x+3}{7x} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)} + \frac{x+3}{7x} = \frac{7x(x-2)+x+3}{7x} = \frac{7x^2-13x+3}{7x}$

$\rightarrow \frac{g}{f}(x)$: πρέπει επιπλέον $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-6}{x+3} \neq 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -3, x \neq 2$

Αρα η $(\frac{g}{f})(x)$ ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R} - \{-3, 0, 2\}$

και έχει τύπο: $(\frac{g}{f})(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x+3}{7x}}{\frac{x^2+x-6}{x+3}} = \frac{(x+3)^2}{7x(x^2+x-6)} = \frac{(x+3)^2}{7(x+3)(x-2)} = \frac{x+3}{7(x-2)}$

5. $f: (-\infty, 3] \rightarrow [-4, +\infty)$ $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$D_f = (-\infty, 3]$: Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 3] \neq f(x_1) = f(x_2) =$

$x_1^2 - 6x_1 + 5 = x_2^2 - 6x_2 + 5 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 - 6x_1 + 6x_2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 6(x_1 - x_2) = 0$
 $\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 6) = 0 \Rightarrow$ ή $x_1 = x_2$ ή $x_1 + x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6$

το οποίο στο $(-\infty, 3]$ έχει μόνο όταν $x_1 = x_2 = 3$

Άρα η f είναι 1:1 στο $(-\infty, 3]$

Εξέχω για το επί: $y = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 - y = 0 \Rightarrow$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, με $\Delta = b^2 - 4ay = 36 - 4(5-y) = 36 - 20 + 4y = 16 + 4y =$

$= 4(4+y) \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4(4+y)}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{4+y}}{2} = 3 \pm \sqrt{4+y}$

Ομως $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow x = 3 - \sqrt{4+y}$ ① Πρέπει $4+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -4$

$\Rightarrow R_f = [-4, +\infty)$ ②. Άρα η f είναι επί αφού π. τιμές και ζυγισμοί τιμών ταυτίζονται. Άρα η f είναι 1:1 και επί και επομένως είναι αντιστρέψιμη $\Rightarrow$ η $f^{-1}(x)$

έχει τύπο (από το ①) $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{4+x}$ και π.ο (από το ②)
 $x \in [-4, +\infty)$

6) $A(4, -5)$ $B(-5, -1)$, $\Gamma(-1, 4)$ Σφύρα της $h(x)$ η οποία έχει αντίστροφο την $h^{-1}(x) =$, το Σ. τιμών της h είναι π.ο της h^{-1}

Άρα για την $h^{-1}(x)$ τα αψίδα γίνονται $A'(-5, 4)$ $B'(-1, -5)$

και $\Gamma'(4, -1) \Rightarrow$ α) $h^{-1}(-5) = 4$, β) $h^{-1}(4) = -1$

και $\Gamma'(4, -1) \Rightarrow$ α) $h^{-1}(-5) = 4$, β) $h^{-1}(4) = -1$
 7) $f(x) = \sqrt{4-x}$, Πρέπει $4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = A = (-\infty, 4]$, $g(x) = x-1 \Rightarrow D_g = B = \mathbb{R}$

για να οριστεί πρέπει το $B' = \{x \in B / g(x) \in A\} \neq \emptyset$
 $\Rightarrow$ ① $x \in B \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ και ② $g(x) \in A \Rightarrow x-1 \leq 4 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow B' = (-\infty, 5] \neq \emptyset$

ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{4-(x-1)} = \sqrt{5-x}$ με π.ο το B'

για να οριστεί πρέπει το $A' = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \emptyset$

① $x \in A \Rightarrow x \leq 4$ και ② $f(x) \in B \Rightarrow \sqrt{4-x} \in \mathbb{R} \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow A' = (-\infty, 4] \neq \emptyset$
 $\Rightarrow$ ορίζεται η $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{4-x}) = \sqrt{4-x} - 1$, με π.ο το A'