Αριθμητικές Πρόοδοι και ακολουθίες

Α. Επαναληπτικές Ασκήσεις

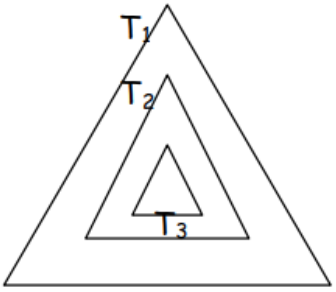
1) Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του πρώτου και του πέμπτου όρου είναι -2 και το άθροισμα του δεύτερου και του έκτου όρου είναι 2 .
Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των έντεκα πρώτων όρων της .

2) Ο αρχικός μισθός ενός υπαλλήλου είναι €900 .Κάθε χρόνο παίρνει αύξηση στο μισθό του €30 . Να βρείτε ποιος θα είναι ο μισθός του σε 10 χρόνια . Σε ποιο χρόνο ο μισθός του θα είναι €1620;

3) Μεταξύ του 4 και του 22 παρεμβλήθηκαν αριθμητικοί ενδιάμεσοι ώστε το άθροισμα όλων των όρων (περιλαμβανομένων των 4 και 22) είναι 91.Πόσοι όροι παρεμβλήθηκαν και ποιοι είναι;

4) Στο διπλανό σχήμα έχουμε ισόπλευρα τρίγωνα .

Το τρίγωνο T_1 έχει πλευρά α ,το T_2 πλευρά $\frac{\alpha}{2}$, το T_3 πλευρά $\frac{\alpha}{4}$.



Συνεχίζουμε να κατασκευάζουμε τρίγωνα τέτοια ώστε το μήκος της πλευράς του επόμενου τριγώνου να είναι κάθε φορά ίσο με το μισό του προηγούμενου .Να βρείτε συναρτήσει του α
α) το μήκος της πλευράς του τριγώνου T_6
β) το άθροισμα απείρων όρων των περιμέτρων των τριγώνων
γ) το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων πρώτων τριγώνων.

$\lambda < 0$

5) Σε γεωμετρική πρόοδο με λ< 0 το άθροισμα του πρώτου και του τέταρτου όρου είναι -28 και το άθροισμα του τρίτου και του έκτου είναι -112. Να βρείτε:
α) την πρόοδο και β) το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της

6) Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας Γ.Π. είναι 8 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 24. Να βρείτε την πρόοδο.

7) Σε φθίνουσα Γ.Π. με άπειρους όρους ισχύει $\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu+2} + \ldots = 2\alpha_\nu$.Να δείξετε ότι το άθροισμα όλων των απείρων όρων της είναι τριπλάσιο του πρώτου όρου της.

8) Αν α,β,γ διαδοχικοί όροι Γ.Π α,χ,β διαδοχικοί όροι Α.Π και β,ψ,γ διαδοχικοί όροι Α.Π να δείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\chi}+\frac{\gamma}{\psi}=2$

9) Αριθμητική και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Α.Π. ισούται με τον λόγο της Γ.Π. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της Α.Π. είναι 19 ενώ το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π. ισούται με τον ένατο όρο της Α.Π. Να βρεθούν οι δύο πρόοδοι.

10) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι: $\Sigma_\nu = 2^{\nu+2} + \chi \quad \forall \nu \in N$.
Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι Γ.Π. και να βρείτε την τιμή του χ.

Β. Ασκήσεις από διαγωνίσματα

1. Να αποδείξετε ότι $1-\boldsymbol{συν}2\boldsymbol{\omega}$, 1 , $2\boldsymbol{συν}^2\boldsymbol{\omega}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μον. 2)

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο η διαφορά του τρίτου όρου από τον όγδοο όρο είναι 15 και $\boldsymbol{\Sigma}_{10} = 155$. Να βρείτε την πρόοδο. (Μον. 3)

3. Σε απολύτως αύξουσα γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα του **δεύτερου και πέμπτου** όρου της είναι ίσο με **54** , ενώ το άθροισμα του **τρίτου και τέταρτου** όρου ισούται με **36**.
α) Να βρείτε την πρόοδο (Μον. 3)
β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του **ν** ώστε να ισχύει:
$$\boldsymbol{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu} < 3100$$ (Μον. 2)

4. Αν σε γεωμετρική πρόοδο ο ένατος όρος είναι 48 , ο πέμπτος όρος είναι 12 και όλοι οι όροι της είναι ομόσημοι, να βρείτε την πρόοδο.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι $\Sigma_{10} = 93\sqrt{2} + 93$. (Μον. 3 -2)

5. Να λύσετε την εξίσωση $5^3 \cdot 5^6 \cdot 5^9 \cdot 5^{12} \cdot \ldots \cdot 5^{3x} = (0{,}04)^{-54}$ (Μον. 2)

6. Αν $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{S_2}$, $\boldsymbol{S_3}$, $\cdots$, $\boldsymbol{S_\nu}$ είναι τα αθροίσματα των απείρων όρων **ν** φθινουσών γεωμετρικών προόδων με **πρώτους όρους** 4 , 6 , 8 , $\cdots$, $2(\nu+1)$ και **λόγους** $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\cdots$ $\frac{1}{2\nu+3}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_\nu = 4\nu + \nu^2$$ (Μον. 3)

7. Δίνεται η πρόοδος 5, 3, 1, -1, ... Να βρείτε:
(α) το είδος της προόδου [β. 0,5]
(β) το δέκατο πέμπτο όρο της [β. 1]
(γ) το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της. [β. 1]

8. Σε γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 4 και ο τέταρτος όρος 108. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της. [β. 2]

9. Μεταξύ των αριθμών 5 και 160 να παρεμβάλετε τέσσερις αριθμούς έτσι ώστε όλοι μαζί να αποτελούν Γ.Π. [β. 2,5]

10. Να υπολογίσετε το άθροισμα $8 + 11 + 14 + \ldots + 53$. [β. 2,5]

11. Να βρείτε το x έτσι ώστε οι αριθμοί $x-1$, $x+2$, $2x+4$ να είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.
[β. 2,5]

12. Σε Α.Π. το άθροισμα του δεύτερου και του έκτου όρου είναι 20 και το άθροισμα των οχτώ πρώτων όρων είναι 92.
(α) Να σχηματίσετε την Α Π
(β) Να βρείτε πόσους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα 145.
[β. 4]

13. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα των απείρων όρων της είναι πενταπλάσιο του πρώτου όρου της και το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 9. Να σχηματίσετε την πρόοδο. [β. 4]

14. Σε Α.Π. ο έβδομος όρος ισούται με 1 και ο τρίτος με 9. Να βρείτε:
(α) τον πρώτο όρο
(β) το δωδέκατο όρο
(γ) το άθροισμα των πρώτων 18 όρων
(δ) το μεγαλύτερο αριθμό όρων που έχουν θετικό άθροισμα. (β. 4, 4, 3, 5))

15. Να βρείτε το άθροισμα των εννέα πρώτων όρων της ακολουθίας:
$$\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15} \ldots$$
(β. 12)

16. Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος για την οποία γνωρίζουμε ότι ο $6^{ος}$ όρος της είναι διπλάσιος του $3^{ου}$ και ότι ο $10^{ος}$ όρος ισούται με 30 (β. 13)

17. Να βρείτε το πιο κάτω άθροισμα:
$$3+7+11+\ldots+151$$
(β. 12)

18. Δίνεται απολύτως φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος με άθροισμα απείρων όρων ίσο με 6. Αν η διαφορά των δύο πρώτων όρων της ισούται με $\frac{8}{3}$. Να σχηματίσετε την πρόοδο.
(β. 14)

19. Τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. και έχουν άθροισμα 21. Αν σε αυτούς προσθέσουμε 2, 3 και 1 αντίστοιχα τότε σχηματίζονται τρεις διαδοχικοί όροι Α.Π. Να βρείτε τους αριθμούς. (β. 15)

20. Δίνεται η ακολουθία με $\alpha_1 = -5$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$. Να βρεθεί
α)ότι είναι αριθμητική πρόοδος, (β. 5, 5, 8)
β) ο γενικός όρος α_ν,
γ) το άθροισμα $\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_{41}$ (

21. Αριθμητικής προόδου ο έβδομος όρος είναι 32 και το άθροισμα του δεύτερου με τον τέταρτο όρο είναι 24.

i. Να βρείτε την πρόοδο (δώστε τους 4 πρώτους όρους),

ii. Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της,

iii. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της που είναι μεγαλύτερος του 253; **(μ. 5)**

22. Δίνεται φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με δεύτερο όρο ίσο με 6 και άθροισμα απείρων όρων τριπλάσιο του πρώτου όρου της. Να βρείτε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της. **(μ. 3)**

23. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\sqrt{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+...$ **(μ. 3)**

24. Μεταξύ των αριθμών 1 και $\frac{-1}{243}$, να παρεμβάλετε τέσσερεις αριθμούς έτσι που να σχηματιστεί γεωμετρική πρόοδος. **(μ. 2)**

25. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $3+7+11+...+95$. **(μ. 2)**

26. Οι αριθμοί: ψ, χ, 5ψ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί: 1, ψ, $\chi-2$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ. **(μ. 2)**

27. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι ίση με τον λόγο της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με 19, ενώ το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με τον ένατο όρο της αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τις δύο προόδους. **(μ. 3)**

28. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2+x^3+...+x^{15}=\frac{x^{16}}{x-1}+6x$ **(μ. 3)**

29. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x....}}}}}=3$ **(μ. 1)**