

- Ορισμός παραγώγου: (συνάρτησης)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(σε σημείο x_0)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Κανόνες παραγώγισης:

Συνάρτηση	Παράγωγος
$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$
$cf, c \in \mathbb{R}$	$(cf)' = cf'$
fg	$(fg)' = f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

- Παραγώγοι βασικών συναρτήσεων:

Συνάρτηση	Πρώτη Παράγωγος	Συνάρτηση	Πρώτη Παράγωγος
1. $y = c$ (σταθερά)	$y' = 0$		
2. $y = x$	$y' = 1$		
3. $y = c \cdot x$	$y' = c$	$y = c \cdot f(x)$	$y' = c \cdot f'(x)$
4. $y = x^v$	$y' = v \cdot x^{v-1}$	$y = f^v(x)$	$y' = v \cdot f^{v-1}(x) \cdot f'(x)$
5. $y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
6. $y = \eta\mu x$	$y' = \sigma\upsilon\nu x$	$y = \eta\mu f(x)$	$y' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$
7. $y = \sigma\upsilon\nu x$	$y' = -\eta\mu x$	$y = \sigma\upsilon\nu f(x)$	$y' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$
8. $y = \epsilon\phi x$	$y' = \tau\epsilon\mu^2 x$	$y = \epsilon\phi f(x)$	$y' = \tau\epsilon\mu^2 f(x) \cdot f'(x)$
9. $y = \sigma\phi x$	$y' = -\sigma\tau\epsilon\mu^2 x$	$y = \sigma\phi f(x)$	$y' = -\sigma\tau\epsilon\mu^2 f(x) \cdot f'(x)$
10. $y = \tau\epsilon\mu x$	$y' = \tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x$	$y = \tau\epsilon\mu f(x)$	$y' = \tau\epsilon\mu f(x) \cdot \epsilon\phi f(x) \cdot f'(x)$
11. $y = \sigma\tau\epsilon\mu x$	$y' = -\sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\phi x$	$y = \sigma\tau\epsilon\mu f(x)$	$y' = -\sigma\tau\epsilon\mu f(x) \cdot \sigma\phi f(x) \cdot f'(x)$
12. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
13. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
14. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$
15. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$

- Κλίση εφαπτομένης μιας καμπύλης σε σημείο της (x_1, y_1) :

$$\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(x_1) \quad \text{ή} \quad \lambda_{\varepsilon\phi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1}$$

- Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης $f(x, y)=0$

Παραγωγίζουμε ως προς x κάθε όρο της $f(x, y)=0$ και

λύουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$ την εξίσωση που προκύπτει.

- Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης (Κανόνας αλυσίδας)

$$\text{Av } \begin{cases} y = f(z) \\ z = g(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Παράγωγος συνάρτησης που ορίζεται παραμετρικά

$$\text{Av } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

- Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

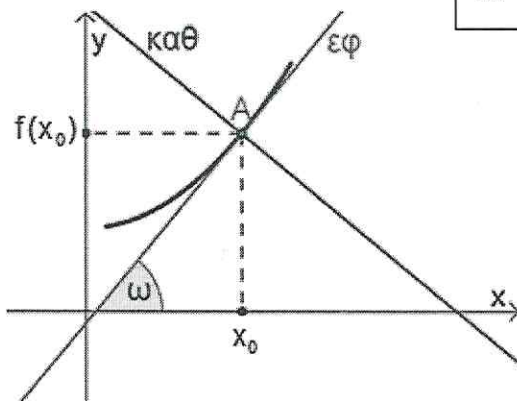
- Γεωμετρική σημασία παραγώγου

- Η κλίση $\lambda_{\varepsilon\phi}$ της εφαπτομένης του διαγράμματος μιας συνάρτησης $y=f(x)$

σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτού είναι: $\lambda_{\varepsilon\phi} = f'(x_0)$ ή $\lambda_{\varepsilon\phi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$

- Η κλίση $\lambda_{\kappa\alpha\theta}$ της καθέτου του διαγράμματος μιας συνάρτησης $y=f(x)$

σε σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτού είναι: $\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\phi}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$



$$\lambda_{\kappa\alpha\theta} \cdot \lambda_{\varepsilon\phi} = -1$$

$$\lambda_{\varepsilon\phi} = \varepsilon\phi\omega$$

Εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο (x_0, y_0) και έχει κλίση λ : $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - y_1 = \lambda_{\text{εφ}} (x - x_1)$

Εξίσωση κάθετης: $y - y_1 = \lambda_{\text{καθ}} (x - x_1)$

Για επιπλέον εμπέδωση της ύλης και εξάσκηση των μαθητών, για την πιο πάνω ενότητα, δίνονται οι πιο κάτω ασκήσεις:

1) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων με τύπο:

α) $f(x) = x^2 + 3x$

β) $y = x^3 - 2x^2 + 5$

2) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων που ορίζονται με τους πιο κάτω τύπους:

α) $y = 3t^2 + 6t - 1$

β) $f(x) = (2e^x - 3)x^2$

γ) $f(x) = \frac{1-2x}{x^3+1}$

δ) $f(\theta) = \frac{1-\sin\theta}{1+\eta\mu\theta}$

ε) $f(t) = t \cdot \varepsilon\phi t$

στ) $f(x) = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x}{1+\sigma\phi x}$

ζ) $y = x^2 \sin 4x$

η) $y = \varepsilon\phi^4 5x$

θ) $y = e^{\eta\mu^3 x}$

ι) $y = \sqrt{2 + \sin 3x}$

κ) $y = \ln \frac{1-\varepsilon\phi x}{\varepsilon\phi^2 x}$

λ) $y = e^{2x} \ln(x^2 + 1)$

μ) $x^2 - y^2 + xy = 3$

ν) $y = x^{\ln x}$

ξ) $y = 2^{x^2+1}$

ο) $y = 5^{\eta\mu^3 x}$

3) Αν $y = \eta\mu^2 x$, να δείξετε ότι $y'' + 4y = 2$.

4) Αν $y = \frac{1}{2} \varepsilon\phi^2 x + \ln(\sin x)$, να δείξετε ότι $y' = \varepsilon\phi^3 x$.

5) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x^2 - 2xy - y^2 - x = 0$ στο σημείο της με τετμημένη 1 και $y < 0$.

6) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η καμπύλη $y = x^3 + 3x^2 - 7x - 6$ έχει εφαπτόμενες ευθείες που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$. Στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης σε εκείνο το σημείο από τα πιο πάνω όπου $x > 0$.

7) Δίνεται η καμπύλη $y = x \cdot e^{x^2}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο όπου $x = 0$.

β) Αν $y' - y^2 = e^{x^2} - 3x^2$, να δείξετε ότι $x^2 = \ln 3$ ή $x = 0$.

8) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $y = \ln(1 - \sin x)$. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\sin x - 1}$ β) $\frac{d^2 y}{dx^2} + e^{-y} = 0$

9) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση: $\psi^2 - \chi\psi = 10$.

(α) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\psi}{2\psi - \chi}$

(β) Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος $\frac{d^2 \psi}{dx^2}$

(γ) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{dx} + (2\psi - \chi) \frac{d^2 \psi}{dx^2} = \frac{\psi + 20}{2\psi - \chi}$

10) Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια.

β) Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_1 = 3$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(3, f(3))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(3, 1)$ έχει κλίση ίση με $\frac{4}{9}$.

11) Δίνεται η καμπύλη με τύπο $\ln(e + \sin y) = x + \ln x, x > 0, y \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι:

α) $x \cdot e^x - \sin y = e$

β) $\eta \mu y \cdot \frac{dy}{dx} = -(x + 1) \cdot e^x$

γ) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με $x = 1$ είναι η $4e \cdot x + 2y = 4e + \pi$.

- 12) Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις: $x = e^{-t}$, $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$
- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο με $t = -1$.
- γ) Να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2$.
- 13) Δίνεται η καμπύλη $y = e^{2x+1}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι: $y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{d^v y}{dx^v} = (2^{v+1} - 1) \cdot e^{2x+1}$, $v \in \mathbb{N}$
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α της καμπύλης, στο οποίο η κλίση της καθέτου ισούται με $-\frac{e}{2}$.
- 14) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ \alpha x + \beta, & x \geq \pi \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = \pi$ να υπολογίσετε τα α, β .
- 15) Αν $x = e^{-t}$ και $y = \eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t$ να δείξετε ότι $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$.
- 16) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f είναι:
- α) συνεχής στο σημείο $x = 0$.
- β) παραγωγίσιμη στο $x = 0$.
- 17) α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^x$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι οι όροι $\frac{f(x)}{1+\ln x}$, $f(x)$, $f'(x)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου στην καμπύλη $y = f(x)$, στο σημείο της με $x = 1$.
- γ) Αν $g(x) = \ln f(x)$, να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει $x^2 g''(x) - x g'(x) + g(x) = 0$.
- 18) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.
- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο με $x_0 = 0$.

19) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $y = \ln(1 - \sin x)$

α) Να δείξετε ότι: $y' = \sigma\phi \frac{x}{2}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $y' \cdot \eta\mu \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

γ) Να δείξετε ότι: $y'' + e^{-y} = 0$

Αν $f(e^{2x} - 1) = x^2 + 14e^{\frac{1}{7}x}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. να βρείτε την $f'(0)$

20) Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 3\sigma\upsilon\nu\theta - 1 \\ y = 2 + \eta\mu\theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $9(y - 2) \frac{d^2y}{dx^2} + 9 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0$.

21) (α) Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις $\begin{cases} x = 3\sigma\upsilon\nu\theta \\ y = 2\eta\mu\theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Να βρείτε:

(i) Τις παραγώγους $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(ii) Την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(β) Δίνεται ότι $y = \eta\mu(e^x - 1)$. Να αποδείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$.

22) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x - 4) \cdot \ln(x - 4)$, $x \in (5, +\infty)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(6, f(6))$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f''(x) = \frac{1}{x-4}$, $x \in (5, +\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $f''(x) + f'''(x) + \frac{f^{(4)}(x)}{2} + \frac{f^{(5)}(x)}{2 \cdot 3} + \frac{f^{(6)}(x)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{f^{(7)}(x)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{x-3}$, $x \in (5, +\infty)$.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5, & x < 1 \\ (\beta + 2)\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση $g(e^{2x}) = \ln(3x)$, $x > 0$.

(α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου, να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να δείξετε ότι $-\ln\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f'(9) + \frac{16 \ln 2}{3} g'(4) = 2$.

24) α) Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2t^2 - 3t \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = 2$.

b. Να υπολογίσετε την $\frac{d^2y}{dx^2}$.

β) Δίνεται η καμπύλη $xy + y^2 = 1$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης ευθείας της καμπύλης στο σημείο της με $x = 0$ και $y < 0$.

ii. Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(x+2y)^3}$.

25) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu^2(x-2) + x - 1, & x < 2 \\ x^2 - 3x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

β) i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της f στο πεδίο ορισμού της.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \alpha \cdot \ln(x-1) + \beta \cdot e^{-2x+4}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται στο σημείο A με τετμημένη $x = 2$ και ισχύει $g'(2) = f'(3)$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β .

26) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = x \cdot f(\ln x)$, για κάθε $x > 0$. Στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(e, g(e))$ αν $f(1) = f'(1) = 2$.

27) Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} y = e^{-2\theta} \\ x = \ln \sqrt{\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}}, \quad \theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot y$ και να υπολογίσετε το $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \frac{dy}{dx}$.

β) Να βρείτε την $\frac{d^2y}{dx^2}$.

28) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{2x}}{x - 2} = -\frac{5}{2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(2) = 2$

ii. f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = -2$

β) Να υπολογίσετε τη τιμή του πραγματικού αριθμού λ , έτσι ώστε η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$ να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^2 + 2x + 2\lambda$.

29) Δίνεται η καμπύλη με τύπο $\ln(e + \sigma\upsilon\nu y) = x + \ln x, x > 0$ και $y \in (0, \pi)$.

Να δείξετε ότι:

(α) $\eta\mu y \cdot \frac{dy}{dx} = -(x + 1)e^x$

(β) η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο με $x = 1$ έχει εξίσωση:

$$4ex + 2y - 4e - \pi = 0$$

30) α) Αν $e^\Psi = \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi$, να αποδείξετε ότι: $\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = \frac{2}{\eta\mu 2\chi - 1}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση: $f(\chi) = \frac{1}{2} \ln(2 - \chi)$, όπου $\chi < 2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M της καμπύλης $f(\chi)$, στο οποίο η κλίση της καθέτου είναι 8.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$1) \psi = 2\chi^3 - 5\chi^2 + 3\chi + 2$$

$$2) \psi = \frac{8}{\chi^6} + \sqrt[5]{\chi^3} - (\chi^2 + 1)$$

$$3) \psi = \sqrt[4]{\chi^5} - \frac{2}{\chi^2} + 3(2\chi^3 - \chi^2)^4$$

$$4) \psi = \sqrt[3]{\chi^2} + \frac{2}{\chi^4}$$

$$5) \psi = \frac{3\chi - 2}{\chi + 1}$$

$$6) \psi = \frac{\chi^2}{\eta\mu\chi}$$

$$7) \psi = (3e^x - 2) \cdot \chi^3$$

$$8) \psi = \frac{e^{3x}}{(\chi^2 + 1)^3}$$

$$9) \psi = \frac{\chi}{\chi^2 + 1}$$

$$10) \psi = \ln(\sigma\phi\chi)$$

$$11) \psi = (3\chi^4 + 1)^3$$

$$12) \psi = \sqrt{1 + \eta\mu 2\chi}$$

$$13) \psi = e^{3x} \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$14) \psi = e^{2x} \sqrt{\chi^3 + 2\chi}$$

$$15) \psi = \sqrt{2 + \chi^5}$$

$$16) \psi = \frac{e^{\sigma\upsilon\nu^3\chi}}{(\chi^3 - 2\chi)^3}$$

$$17) \psi = \eta\mu^4 2\chi \cdot \sigma\tau\epsilon\mu 4\chi$$

$$18) \psi = (\chi^3 - 1) \cdot \sqrt{\chi^3 + 1}$$

$$19) \psi = \ln \sqrt{\frac{\chi \cdot \sigma\phi^3 \chi}{\chi^2 - 1}}$$

$$20) \psi = \frac{\chi^2}{\chi^4 - 1} + \ln(\eta\mu 3\chi)$$

$$21) \psi = \sqrt{\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 5\chi$$

$$22) \psi = \ln(\eta\mu^2 \chi)$$

$$23) \psi = \ln(\tau\epsilon\mu\chi + \epsilon\phi\chi)$$

$$24) \psi = \frac{\eta\mu^3 2\chi}{\chi^4}$$

$$25) \psi = \ln \frac{\chi}{1-\chi}$$

$$26) \psi = \ln(\eta\mu\chi^2)$$

$$27) \psi = \eta\mu^2(3\chi^5 + 2\chi - 6)$$

$$28) \psi = (2\chi^2 - 1) \cdot \tau\epsilon\mu 2\chi$$

$$29) \psi = \log \sqrt{5\chi^2 - 1}$$

$$30) \psi = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 6\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu 6\chi}$$

$$31) \psi = e^{2\chi - \chi^2} + 2^{\sigma\phi\chi}$$

$$32) \psi = \log_3(8\chi^2 - 5)$$

$$33) 5\ln(\eta\mu\chi) - \chi \cdot \psi^2 = \sigma\upsilon\nu\psi$$

$$34) \psi = (\sigma\upsilon\nu\chi)^x$$

$$35) \psi^2 + 2\chi\psi - 4\psi = 5\chi$$

$$36) \psi = \chi^{\sigma\phi\chi}$$

$$37) \psi = 5^{5\chi}$$

$$38) \psi = \chi^{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

$$39) \psi = (\chi^3 - 1)^{x^2+1}$$

$$40) \psi\chi^2 + \psi^3\chi + 4\chi^3 - 2 = 0$$

$$41) \psi = (\tau\epsilon\mu\chi)^x$$

$$42) \psi = \chi^x + 2^x + e^x + \chi$$

$$43) \psi = (\eta\mu\chi)^{\epsilon\phi\chi+1}$$

$$44) \psi = (\chi + \eta\mu\chi)^x$$

$$45) \text{ Av } \psi = \frac{2\chi}{\epsilon\phi\chi} \text{ να δείξετε ότι } \frac{dy}{dx} = \frac{\eta\mu 2\chi - 2\chi}{\eta\mu^2\chi}$$

56) Αν $\ln(\sin \psi) = \chi + \ln \chi$, να δείξετε ότι:

α) $\eta \mu \psi \cdot \frac{dy}{dx} = -(\chi + 1) \cdot e^x$

β) $\chi(\chi + 1)e^{2x} \cdot \frac{dy}{dx} - \eta \mu^2 \psi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = (\chi + 2)e^x \cdot \eta \mu \psi$

57) Αν $\psi = \sin(e^x + \frac{\pi}{4})$, να δείξετε ότι: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - \psi \cdot e^{2x}$

58) Δίνεται η καμπύλη $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + \psi = 5$ να δείξετε ότι:

α) $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2\chi}{2\psi + 1}$

β) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-50}{(2\psi + 1)^3}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο με $\chi = -1$ και $\psi < 0$.

59) Η καμπύλη με τύπο $\psi = \alpha \chi^2 - 2\chi \cdot \ln \chi$ περνά από το σημείο $M(1, 2)$ να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M .

56) Αν $\ln(\sin \psi) = \chi + \ln \chi$, να δείξετε ότι:

α) $\eta \mu \psi \cdot \frac{dy}{dx} = -(\chi + 1) \cdot e^x$

β) $\chi(\chi + 1)e^{2x} \cdot \frac{dy}{dx} - \eta \mu^2 \psi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = (\chi + 2)e^x \cdot \eta \mu \psi$

57) Αν $\psi = \sin(e^x + \frac{\pi}{4})$, να δείξετε ότι: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} - \psi \cdot e^{2x}$

58) Δίνεται η καμπύλη $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + \psi = 5$ να δείξετε ότι:

α) $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2\chi}{2\psi + 1}$

β) $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-50}{(2\psi + 1)^3}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο με $\chi = -1$ και $\psi < 0$.

59) Η καμπύλη με τύπο $\psi = \alpha \chi^2 - 2\chi \cdot \ln \chi$ περνά από το σημείο $M(1, 2)$ να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο M .

Λύκειο Λινόπετρας

Σχολ. Έτος 2021-22

Τμήμα : Β42

καθ. Ευγενία Χατζηιωάννου



Ημ. 07/04/22..

Ονοματεπώνυμο:..... Βαθμός :..../40=..../20

Υπογραφή καθηγητή:.....

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :

μ.18

α) $f(x) = 5 - \eta \mu x$

β) $f(x) = \sigma \tau \epsilon \mu 4 x$

γ) $y = 2^{(x^2-1)} \Rightarrow$

δ) $f(x) = x^4 - \frac{5}{x} + \sigma \nu \nu(e) + \frac{x}{3}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

ε) $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

στ) $y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

ζ) $g(x) = \sqrt{3 + \sigma \phi^2 x}$

η) $y = \sigma \nu \nu(\eta \mu x)$

θ) $y = \sqrt[3]{x \epsilon \phi x}$

2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$ μ.4

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Αν $f(x) = 3e^{-x} + e^{-3x}$, να δείξετε ότι $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 0$. μ.4

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\eta\mu x - 1) + f(x^2) = 3 + 5\eta\mu x + 5x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(-1) = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 5$.

μ.4



1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων :

μ.18

α) $f(x) = 5 \cdot \eta \mu x \Rightarrow f'(x) = -6 \omega x$ (2)

β) $f(x) = \sigma \tau \epsilon \mu 4x \Rightarrow f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \sigma \tau \epsilon \mu 4x$ (1/2)

γ) $y = 2^{(x^2-1)} \Rightarrow y' = 2^{x^2-1} (\ln 2) (2x)$

δ) $f(x) = x^4 - \frac{5}{x} + \sigma \nu \nu(e) + \frac{x}{3}, x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{3}$

ε) $f(x) = \frac{3-x}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \frac{-(x-2) - (3-x)}{(x-2)^2} = \frac{-x+2-3+x}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$ (1/2)

στ) $y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' = \frac{e^x(e^x + e^{-x}) - e^x(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2}$ (1/2)

ζ) $g(x) = \sqrt{3 + \sigma \phi^2 x}$

$g'(x) = \frac{(3 + \sigma \phi^2 x)'}{2 \sqrt{3 + \sigma \phi^2 x}} = \frac{2 \sigma \phi x (-\sigma \tau \epsilon \mu^2 x)}{2 \sqrt{3 + \sigma \phi^2 x}} = -\frac{\sigma \phi x \cdot \sigma \tau \epsilon \mu^2 x}{\sqrt{3 + \sigma \phi^2 x}}$ (1/2)

η) $y = \sigma \nu \nu(\eta \mu x)$

$\frac{dy}{dx} = -\eta \psi(\eta \mu x) \sigma \nu \nu x$ (1)

θ) $y = \sqrt[3]{x \epsilon \varsigma x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} (x \epsilon \varsigma x)^{-\frac{2}{3}} (x \epsilon \varsigma x)' = \frac{1}{3} (x \epsilon \varsigma x)^{-\frac{2}{3}} (\epsilon \varsigma x + x \tau \epsilon \mu^2 x)$ (1)

(4) $f(\eta \mu x - 1) + f(x^2) = 3 + 5 \eta \mu x + 5x^2$

$f'(\eta \mu x - 1) \sigma \nu \nu x + f'(x^2) 2x = 5 \sigma \nu \nu x + 10x$ (2)

Για $x=0 \Rightarrow f'(\eta \mu 0 - 1) \sigma \nu \nu 0 + f'(0^2) 2 \cdot 0 = 5 \sigma \nu \nu 0 + 10 \cdot 0$

$\Rightarrow f'(-1) = 5$ (1)

Για $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(\eta \mu \frac{\pi}{2} - 1) \sigma \nu \nu \frac{\pi}{2} + f'(\frac{\pi^2}{4}) \frac{\pi}{2} = 5 \sigma \nu \nu \frac{\pi}{2} + 10 \frac{\pi}{2}$

2) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 0 \\ \sin x & x > 0 \end{cases}$ μ.4

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Αν $f(x) = 3e^{-x} + e^{-3x}$, να δείξετε ότι $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 0$. μ.4

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\eta\mu x - 1) + f(x^2) = 3 + 5\eta\mu x + 5x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(-1) = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = 5$. μ.4

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x \cdot \frac{1}{2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

α) $x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ $\partial \epsilon \varsigma = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
 $\epsilon \varsigma \text{ εφαπτομένης } y - 0 = -1(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$

3) $f(x) = 3e^{-x} + e^{-3x} \Rightarrow f'(x) = -3e^{-x} - 3e^{-3x}$
 $f''(x) = +3e^{-x} + 9e^{-3x}$

$f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 3e^{-x} + 9e^{-3x} + 4(-3e^{-x} - 3e^{-3x}) + 3(3e^{-x} + e^{-3x})$
 $= 3e^{-x} + 9e^{-3x} - 12e^{-x} - 12e^{-3x} + 9e^{-x} + 3e^{-3x} = 0$

① Στο γράφημα των εκφράσεων

② α) $f(x) = e^x - \frac{3}{x^3} + \sqrt{x} - 2^x + \pi^2 = e^x - 3 \cdot x^{-3} - 2^x + \pi^2$

$\Rightarrow f'(x) = e + 6x^{-3} - 2^x \ln 2 + 0 = e + \frac{6}{x^3} - 2^x \ln 2$

β) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x}-1) - \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)'}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$= \frac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

γ) $f(x) = \text{erf}^3(\sqrt{x^2+e}) \Rightarrow f'(x) = 3\text{erf}^2(\sqrt{x^2+e}) \cdot (\text{erf} \sqrt{x^2+e})'$
 $= 3\text{erf}^2 \sqrt{x^2+e} \cdot \text{erf} \sqrt{x^2+e} \cdot \text{erf}' \sqrt{x^2+e} \cdot (\sqrt{x^2+e})'$
 $= 3\text{erf}^3 \sqrt{x^2+e} \cdot \text{erf}' \sqrt{x^2+e} \cdot \frac{2x+e^x}{2\sqrt{x^2+e}}$

δ) $f(x) = x^2 e^x \cdot (x+1) \Rightarrow f'(x) = (x^2 e^x)'(x+1) + x^2 e^x (x+1)'$
 $= (2x e^x + x^2 e^x)(x+1) + x^2 e^x = 2x^2 e^x + 2x e^x + x^3 e^x + x^2 e^x = \underline{\underline{x^3 e^x + 3x^2 e^x + 2x e^x}}$

ε) $y = x^{u/x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{u/x} \Rightarrow \ln y = \frac{u}{x} \ln x$
 $\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{u}{x} \ln x + \frac{u}{x} \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{u}{x} \ln x + \frac{u}{x^2} \right]$

③ $f(x) = x^2 + x \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - (x^2 + x) =$
 $= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x - x^2 - x = \Delta x(2x + \Delta x + 1)$
 $\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 1)}{\Delta x} = \underline{\underline{2x+1}}$

④ Παραγωγίσιμη στο 0 $\Rightarrow$ συνεχής στο 0 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{\underline{f(0)=a}}$
 $\Rightarrow \boxed{a=0}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + u/x + a - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx - a}{x}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{u}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{bx - a}{x} = 0 + 1 = b \Rightarrow \underline{\underline{b=1}}$

⑤ α) $A(0,1) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 0 = e^t \cdot u(t) \Rightarrow u(t)=0 \Big|_{e^t > 0} \Big|_{t \in [0, \pi)} \Rightarrow t=0$

Για $t=0 \Rightarrow y = e^0 \sin 0 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ το $A(0,1)$ ανήκει στην καμπύλη

$$5b) \quad y = e^{-t} \cos t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = (e^{-t})' \cos t + e^{-t} (\cos t)' = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t = -e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

$$x = e^t \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (e^t)' \sin t + e^t (\sin t)' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-e^{-t} (\cos t + \sin t)}{e^t (\sin t + \cos t)} = \frac{-e^{-t}}{e^t} = -e^{-2t}$$

$$r) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(-e^{-2t})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{+2e^{-2t}}{e^t (\sin t + \cos t)} = \frac{2e^{-3t}}{\sin t + \cos t}$$

$$⑥ \quad 2[f(x)]^2 + 9 = [g(x)]^3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Από την αρχική για } x=x_0 \Rightarrow \\ 2f(x_0)^2 + 9 = g(x_0)^3 \\ f(x_0)=3 \end{array} \right\} \Rightarrow g(x_0) = 2 \cdot 3^2 + 9 = 27 \Rightarrow \underline{g(x_0)=3}$$

$$4f(x)f'(x) = 3g(x)g'(x)$$

$$\text{Από για } x=x_0 \Rightarrow 4f(x_0) \cdot f'(x_0) = 3g(x_0) \cdot g'(x_0) \Rightarrow$$

$$4 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3^2 \cdot g'(x_0) \Rightarrow g'(x_0) = 4$$

$$⑦ \quad x^2 - xy^2 + 6x + 4 = 0, \text{ για } x=-4 \Rightarrow 16 + 4y^2 - 24 + 4 = 0 \Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow \underline{y=1}$$

$$\Rightarrow A(-4, 1). \quad 2x - (y^2 + x \cdot 2y \frac{dy}{dx}) + 6 = 0 \Rightarrow 2x - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = -6 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2x - 6}{-2xy} \Rightarrow \text{slope at } A(-4, 1) = \frac{1 + 8 - 6}{-8} = \frac{3}{-8} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -\frac{8}{3}}$$

$$y - 1 = -\frac{8}{3}(x + 4) \Rightarrow 3y - 3 = -8x - 32 \Rightarrow \underline{8x + 3y = -29}$$

$$⑧ \quad f(x) = \ln \frac{ax^4}{1+x^2} = \ln ax^4 - \ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{4ax^3}{ax^4} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{4}{x} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \text{slope at } x=1 = 4 - \frac{2}{2} = 3 \quad \text{of eq: } y - (1 - \ln 2) = 3(x - 2) \Rightarrow \underline{y = 3x - 5 - \ln 2}$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow y = 3 - 5 - \ln 2 = -2 - \ln 2 \Rightarrow \text{το } (1, -2 - \ln 2)$$

είναι το σημείο της καμπύλης στο οποίο τρέφεται από την εφαπτομένη $\Rightarrow$ το $(1, -2 - \ln 2)$ ανήκει στην $f(x)$

$$\Rightarrow -2 - \ln 2 = \ln \left(\frac{a \cdot 1}{2} \right) \Rightarrow -2 - \ln 2 = \ln a - \ln 2 \Rightarrow \ln a = 2 \Rightarrow \underline{a = e^2}$$

⑨

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot [f^2(x) + 1] - 2f(x) \cdot f'(x) \cdot f(x)}{[f^2(x) + 1]^2}$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow g'(0) = \frac{f'(0) \cdot [f^2(0) + 1] - 2f(0) \cdot f'(0) \cdot f(0)}{f^2(0) + 1} = \frac{2(1) - 0}{1} = \underline{2}$$

Πέμπτη 5 Μαΐου 2017-18

1. Με χρήση του οριζοτι να βρείτε τον παραγώγο αριθμού της $f(x) = x^3$ στο σημείο με $x_0 = 3$.
2. Με χρήση του οριζοτι της παραγώγου να βρείτε την παραγώγο συνάρτησης της $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
3. Να βρείτε την παραγώγο των πιο κάτω συναρτήσεων
 - α) $y = x^3 + \frac{3}{x^2} + 3x + e^2$ ε) $y = x^{\ln x}$
 - β) $y = 8^{5x+3}$ στ) $y = \log_3 \sqrt{\frac{e^x+2}{e^x+2}}$
 - γ) $y^2 - xy = 3$
 - δ) $y = e^{\varphi^2(x^2+1)^3}$
4. Αν $e^x y = u f(x)$, να δείξετε ότι: $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$
5. Αν $x = t - 3t^2$, $y = t^3 + 1$, να βρείτε την $\frac{d^2 y}{dx^2}$ όταν $y = 0$, ($t \neq \frac{1}{3}$)
6. Αν $f(x) = \begin{cases} 4x, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases}$
 - α) να βρείτε την παραγώγο της f
 - β) να εξετάσετε αν η παραγώγο της f δεχεται εφαπτόμενο στο σημείο με $x = 0$
7. Αν $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 2, & x < 1 \\ a\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
8. Αν $f(x) = \frac{1 + \ln^2 x}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ να βρείτε:
 - α) τις εξισώσεις της εφαπτομένης με f στο σημείο της με $x = e^2$
 - β) τη συνάρτηση της στο οποίο δεχεται οριζόντιες εφαπτόμενες
9. Με χρήση του θεωρήματος της αντίστροφης παραγώγου να βρείτε την παραγώγο της $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 3 \Rightarrow f(3) = 27$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)} = 9+9+9 = \underline{\underline{27}}$$

2. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) + 1 - (3x^2 + 2x + 1) =$
 $= 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 1 - 3x^2 - 2x - 1 = 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2\Delta x = \Delta x(6x + 3\Delta x + 2)$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(6x + 3\Delta x + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x + 2) = \underline{\underline{6x + 2}}$$

3. a) $y = x^8 + 3x^{-2} + 3x + e^2 \Rightarrow y' = 8x^7 - 6x^{-3} + 3 = 8x^7 - \frac{6}{x^3} + 3$

b) $y = 8^{5x^2+3} \Rightarrow y' = 8^{5x^2+3} (5x^2+3)' \ln 8 = 8^{5x^2+3} \cdot 10x \cdot \ln 8$

r) $y^2 - xy = 3 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} - [x'y + x(y)'] = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y-x}$

s) $y = e^{(x^2+1)^3} \Rightarrow y' = 2e^{(x^2+1)^3} \cdot [e^{(x^2+1)^3}]' = 2e^{(x^2+1)^3} \cdot \frac{d}{dx} [e^{(x^2+1)^3}] =$
 $= 2e^{(x^2+1)^3} \cdot \frac{d}{dx} [e^{(x^2+1)^3}] = 2e^{(x^2+1)^3} \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)' = 12x e^{(x^2+1)^3} \cdot (x^2+1)^2$

e) $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow \ln y = (\ln x)^2$
 $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \ln x \cdot (\ln x)' \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y \frac{\ln x}{x} = 2 \cdot \frac{x^{\ln x} \ln x}{x}$

ae) $y = \log_3 \sqrt{e^x+2} = \frac{1}{2} \log_3 \left(\frac{e^x+2}{e^x+2} \right) = \frac{1}{2} [\log_3(e^x+2) - \log_3(e^x+2)] \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{(e^x+2)'}{(e^x+2) \ln 3} + \frac{(e^x+2)'}{(e^x+2) \ln 3} \right] = \frac{1}{2 \ln 3} \left[\frac{-e^{-x}}{e^x+2} + \frac{e^x}{e^x+2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2 \ln 3} \frac{-e^{-x} \cdot e^x - 2e^x + e^x \cdot e^x + 2e^x}{(e^x+2)(e^x+2)} = \frac{1}{2 \ln 3} \frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x+2)(e^x+2)} = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x+2)(e^x+2) \ln 3}$$

4. $e^y = u f(x) \Rightarrow y = \frac{u f(x)}{e^x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u f(x) e^x - e^x u f'(x)}{(e^x)^2} = \frac{e^x (u f(x) - u f'(x))}{(e^x)^2} = \frac{u f(x) - u f'(x)}{e^x}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(u f(x) - u f'(x)) e^x - e^x (u f(x) - u f'(x))}{(e^x)^2} = \frac{e^x (-u f'(x) - u f(x) - u f(x) + u f'(x))}{(e^x)^2} = \frac{-2u f(x)}{e^x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \Rightarrow \frac{-2u f(x)}{e^x} + 2 \frac{u f(x) - u f'(x)}{e^x} + 2 \frac{u f(x)}{e^x} =$$

$$\frac{-2u f(x) + 2u f(x) - 2u f'(x) + 2u f(x)}{e^x} = \frac{0}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

$$5. y = t^3 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2, \quad x = t - 3t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 - 6t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{1-6t} \quad (t \neq \frac{1}{6})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{6t(1-6t) + 6 \cdot 3t^2}{(1-6t)^2}}{(1-6t)} = \frac{6t - 36t^2 + 18t^2}{(1-6t)^3} = \frac{6t - 18t^2}{(1-6t)^3}$$

$$\text{Για } y=0 \Rightarrow t^3+1=0 \Rightarrow t^3=-1 \Rightarrow t=-\sqrt[3]{1}=-1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=-1} = \frac{-6-18}{(-7)^3} = \frac{-24}{-343} = \frac{24}{343}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{2x}, & x < 0 \\ x^2 + 2x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \textcircled{a} \quad \text{Για } x < 0 \Rightarrow f'(x) = 2\sqrt[4]{2x}$$

$$\text{Για } x > 0 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$$

Εξετάζω κατά πόσο υπάρχει η παράγωγος στο $x=0$ ($f(0)=0$)

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{2x} - 0}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[4]{2x}}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+2)}{x} = 2 \quad \Bigg\} \Rightarrow f'(0) = 2$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} 2\sqrt[4]{2x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2x + 2, & x > 0 \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 2, & x < 1 \\ a\sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{Είναι παράγωγος στο } x=1 \Rightarrow \exists \text{ η } f'(1)$$

$$\text{και η } f \text{ συνεχής στο } x=1 \quad \boxed{f(1)=a}$$

$$\rightarrow \text{f συνεχής στο } x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = , \quad \boxed{f(1)=a}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 6x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a\sqrt{x} = a \Rightarrow 1 - 6 + 2 = a \Rightarrow \boxed{a = 3 - 6} \quad \textcircled{*}$$

$$f \text{ παράγ στο } x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 6x + 2 - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 6x + 2 - 3 + 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 + 6x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1) + 6(x-1)}{x - 1} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1+6)}{(x-1)} = \frac{a}{2} \Rightarrow 2+6 = \frac{a}{2} \Rightarrow 2+6 = \frac{3-6}{2} \Rightarrow$$

$$a = 3 - 6 \quad \Bigg\} \quad 4 + 2b = 3 - 6 \Rightarrow 3b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \frac{1+\ln^2 x}{x}, \text{ @ Για } x=e^2 \Rightarrow y = \frac{1+\ln^2 e^2}{e^2} = \frac{1+4}{e^2} = \frac{5}{e^2} \quad \left| \begin{array}{l} \ln^2 e^2 = (\ln e^2)^2 = \\ (2 \ln e)^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \frac{(1+\ln^2 x)' \cdot x - (x)' \cdot (1+\ln^2 x)}{x^2} = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot (1+\ln^2 x)}{x^2} = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2}$$

$$\Rightarrow J_y = f'(e^2) = \frac{2 \ln e^2 - 1 - \ln^2 e^2}{(e^2)^2} = \frac{4 \ln e - 1 - 4}{e^4} = \frac{4 \cdot 1 - 5}{e^4} = -\frac{1}{e^4}$$

$$\Rightarrow J_y = -\frac{1}{e^4}, \quad A(e^2, \frac{5}{e^2}) \Rightarrow y - y_1 = J_y(x - x_1) \Rightarrow$$

$$y - \frac{5}{e^2} = -\frac{1}{e^4}(x - e^2) \Rightarrow y \cdot e^4 - 5e^2 = -x + e^2 \Rightarrow \underline{x + y e^4 = 6e^2}$$

$$\textcircled{8} \quad \text{And to @ αφού ότι } f'(x) = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2}$$

Αρα για να βρεθεί η f οριστικό εφαπτομένη πρέπει

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x - 1 - \ln^2 x = 0 \quad (\ln x = w) \Rightarrow 2w - 1 - w^2 = 0$$

$$\Rightarrow w^2 - 2w + 1 = 0 \Rightarrow (w-1)^2 = 0 \Rightarrow w = 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Για $x = e \Rightarrow y = \frac{1+\ln^2 e}{e} = \frac{1+1}{e} = \frac{2}{e} \Rightarrow$ η f βρεθεί οριστικό εφαπτομένη στο $(e, \frac{2}{e})$

$$\textcircled{9} \quad \underline{\text{Θεώρημα}} \quad [f'(x)]' = \frac{1}{f'[f'(x)]} \quad \nearrow g'(x) = e^x$$

η συνάρτηση $y = \ln x$ είναι η αντίστροφη της $g(x) = e^x$, $\Rightarrow f(x) = g'(x) = \ln x$

$$\Rightarrow [g'(x)]' = \frac{1}{g'[g'(x)]} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

ΟΝΟΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 /04/ 2018

ΧΡΟΝΟΣ: 45'

ΟΜΑΔΑ Β'

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3x$. Με χρήση του ορισμού της παραγώγου να αποδείξετε ότι $f'(x) = 4x - 3$. (β.2)

2. Δίνεται η καμπύλη $\psi^2 + 2x\psi = 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $x=0$ και $\psi>0$. (β.2)

3. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις $\begin{cases} x = 1 + 2t \sin t \\ \psi = e\varphi^2 t \end{cases}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d\psi}{dx} - x = 0$. (β.3)

4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $\psi = \frac{3^{7x+2}}{e^{5x}}$

β) $\psi = \sin^5(4x-2)$

γ) $\psi = \ln(\sqrt{4x^3+6})$

δ) $\psi = (e\varphi x)^x$

(β.8)

5. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} 7x^2 + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ 5x & x > 0 \end{cases}$ (β.2.5)

6. Μια μπάλα χιονιού σχήματος σφαίρας αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της μπάλας δίνεται από τον τύπο: $r(t) = 5 - t^2$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της μπάλας την χρονική στιγμή $t = 2 \text{ sec}$. (εμβαδόν σφαίρας: $E = 4\pi r^2$) (β.1,5)

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x^2+1) + f(2x) = (x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (β.1)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!!

$$\textcircled{1} f(x) = 2x^2 - 3x \Rightarrow f(x+\Delta x) - f(x) = 2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (2x^2 - 3x) = \\ = 2x^2 + 4x\Delta x + \Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x = 4x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x = \Delta x(4x + \Delta x - 3)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + \Delta x - 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + \Delta x - 3) = \underline{4x - 3}$$

$$\textcircled{2} y^2 + 2xy = 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \quad \left. \begin{array}{l} y > 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$$

$$y^2 + 2xy = 4 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} + 2y + 2x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{2(y+x)} = -\frac{y}{x+y}$$

$$\Rightarrow \text{slope at } A = \frac{-2}{0+2} = -1, y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Rightarrow \underline{y = 2 - x}$$

$$\textcircled{3} y = e^{y^2 t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2e^{y^2 t} (e^{y^2 t})' = 2e^{y^2 t} \cdot t e^{y^2 t} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = 2e^{y^2 t} \cdot t e^{y^2 t} \\ x = 1 + 2t e^{y^2 t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t e^{y^2 t} \cdot e^{y^2 t} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{y^2 t} \cdot t e^{y^2 t}}{2t e^{y^2 t} \cdot e^{y^2 t}} = \underline{\underline{t}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt} (t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2t e^{y^2 t} \cdot e^{y^2 t}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2dy}{dx} - x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2t e^{y^2 t} - (1 + 2t e^{y^2 t}) = 1 + 2t e^{y^2 t} - 1 - 2t e^{y^2 t} = \underline{\underline{0}}$$

$$\textcircled{4} a) y = \frac{3^{7x+2}}{e^{5x}} \Rightarrow y' = \frac{(3^{7x+2})' e^{5x} - (e^{5x})' \cdot 3^{7x+2}}{(e^{5x})^2} = \frac{3^{7x+2} \cdot 7 \ln 3 \cdot e^{5x} - 5e^{5x} \cdot 3^{7x+2}}{(e^{5x})^2} \\ = \frac{3^{7x+2} e^{5x} (7 \ln 3 - 5)}{(e^{5x})^2} = \underline{\underline{\frac{3^{7x+2} (7 \ln 3 - 5)}{e^{5x}}}}$$

$$b) y = 6x^5(4x-2) \Rightarrow y' = 56x^4(4x-2) [6x(4x-2)]' = 56x^4(4x-2) [-4(4x-2) \cdot 6] \\ = -20 \cdot 4(4x-2) \cdot 6x^4(4x-2)$$

$$r) y = \ln \sqrt{4x^3+6} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(4x^3+6) = \frac{1}{2} \frac{(4x^3+6)'}{4x^3+6} = \frac{1}{2} \frac{12x^2}{4x^3+6} = \underline{\underline{\frac{3x^2}{2x^3+3}}}$$

$$s) y = (e^x)^x \Rightarrow \ln y = \ln (e^x)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln (e^x) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln(e^x) + x \cdot \frac{(e^x)'}{e^x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\ln(e^x) + x \frac{e^x}{e^x} \right]$$

$$⑤ \quad f(x) = \begin{cases} 7x^2 + 4x, & x \leq 0 \\ 5x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{Где } x < 0 \Rightarrow f'(x) = 14x + 4$$

$$\underline{f(0) = 0}$$

Где x — это значение x на границе $x=0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{7x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 7x + 4 = 0 + 4 = 4$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x}{x} = 5 \quad \text{Где } \neq f'(0)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 14x + 4, & x < 0 \\ 5, & x > 0 \end{cases}, \quad \text{где } f'(x) \text{ не } \underline{\text{существует}} \text{ при } x=0$$

$$⑥ \quad E = 4\pi r^2 \quad \left[\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{dt} = 8\pi r \cdot (-2t) \right] \Rightarrow \frac{dE}{dt} \Big|_{t=2} =$$

$$r = 5 - t^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -2t \quad \text{Где } t=2 \Rightarrow r = 5 - 4 = 1$$

$$= 8\pi \cdot 1 \cdot (-4) = -32\pi \text{ м}^2/\text{сек}$$

$$⑦ \quad f(x^2+1) + f(2x) = (x+1)^2$$

$$f'(x^2+1) \cdot (x^2+1)' + f'(2x) \cdot (2x)' = 2(x+1)(x+1)'$$

$$f'(x^2+1) \cdot 2x + 2f'(2x) = 2(x+1)$$

$$\text{Где } x=0 \Rightarrow f'(1) \cdot 0 + 2f'(0) = 2 \cdot 1 \Rightarrow 2f'(0) = 2 \Rightarrow \underline{f'(0) = 1}$$