

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Πραγματικοί Αριθμοί

1. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω, χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

β) $\sqrt{14 + \sqrt[3]{8}}$

3. Να κάνετε τις πράξεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $\sqrt{2}(\sqrt{32} - \sqrt{8}) =$

(β) $\sqrt[5]{64} : \sqrt[5]{2} + \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} =$

4. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής :

(α) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

(β) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$

5. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης: $A = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt{27 - \sqrt[4]{16}}$

6. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{11\alpha^2 - \sqrt[3]{8\alpha^6}}$, $\alpha \geq 0$

β) $\frac{x-\psi}{\sqrt{x}-\sqrt{\psi}}$, $x > 0, \psi > 0, x \neq \psi$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x^2 - 6x} = 4$, $x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$

(β) $(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}} = 125$

8. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \sqrt[4]{\alpha^3} \div a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$, $a > 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[4]{x^2 - 9} = 2$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις :

(α) $(3x - 5)^{\frac{3}{2}} = 8$, $x \geq \frac{5}{3}$

(β) $x^2 - 5 = \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt[3]{8}}}$

10. α) Αν $A = \sqrt{6\alpha - \sqrt[3]{16\alpha^5} : \sqrt[3]{2\alpha^2}}$ και $B = (1 + \sqrt{\alpha})^2$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$A + 1 - B = -\alpha$$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $(x + 7)^{\frac{4}{3}} - 16 = 0$

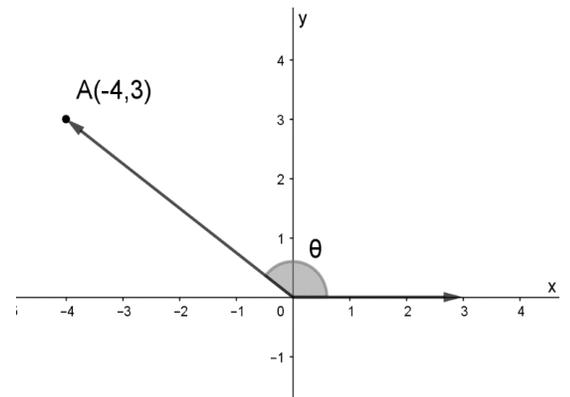
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: Τριγωνομετρία

1. Να βρείτε για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ , αν αυτή είναι σε κανονική θέση και ισχύει:

(α) $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\eta\theta > 0$

(β) $\eta\mu\theta < 0$ και $\epsilon\phi\theta > 0$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γωνία θ σε κανονική θέση και σημείο $A(-4,3)$ της τελικής της πλευράς. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\eta\theta$, $\epsilon\phi\theta$ και $\sigma\phi\theta$.



3. Αν $\sigma\upsilon\eta\theta = \frac{3}{5}$ και $0^\circ < \hat{\theta} < 90^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6\epsilon\phi\theta + 5\eta\mu\theta}{10\sigma\upsilon\eta\theta}$$

4. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{6}{10}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6\epsilon\phi\omega}{8\sigma\phi\omega - 20\sigma\upsilon\upsilon\omega}, \text{ χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες.}$$

5. (α) Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\upsilon\theta = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$. Να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ ($\eta\mu\theta, \epsilon\phi\theta, \sigma\phi\theta$).

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{10\eta\mu\theta + 12\epsilon\phi\theta}{3\sigma\phi\theta - 3}$

6. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\eta\mu(90-\alpha) + \sigma\upsilon\upsilon(180-\alpha) + \sigma\upsilon\upsilon(90-\alpha) + \eta\mu(180-\alpha) = 2\eta\mu\alpha$

(β) $\frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\upsilon\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\upsilon\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\upsilon\chi}{1+\eta\mu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\chi}{1-\eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\upsilon\chi}$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(1 + \sigma\upsilon\upsilon\theta)^2 + \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\upsilon\theta \cdot \epsilon\phi\theta = 2(1 + \sigma\upsilon\upsilon\theta)$

9. Να αποδείξετε τις ταυτότητες :

(i) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\phi\omega - \sigma\upsilon\upsilon\omega = 0$

(ii) $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\upsilon\omega)^2 = 1 - 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\upsilon\omega$

10. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\left[\frac{1 - (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\upsilon\theta)^2}{2\eta\mu^2\theta} \right] \cdot \epsilon\phi\theta = -1$

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 2\eta\mu\theta \cdot x + 1 - \sigma\upsilon\upsilon^2\theta = 0$, να δείξετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, ότι:

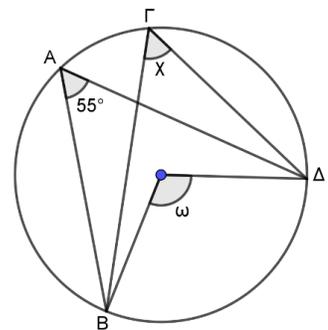
(i) η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και ίσες

(ii) ισχύει η σχέση: $x_1^2 + x_2^2 = 2\eta\mu^2\theta$

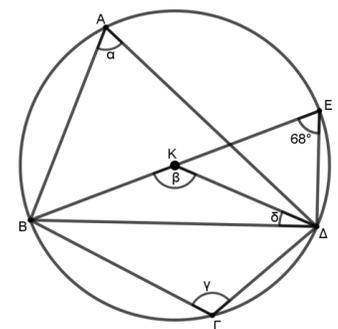
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Κύκλος

1. Να βρείτε τη θέση των κύκλων $(K, 2\text{cm})$ και $(\Lambda, 4\text{cm})$, αν η διάκεντρός τους $K\Lambda$ έχει μήκος $(K\Lambda) = 6\text{cm}$.
2. Δίνονται οι κύκλοι $(K, 8\text{cm})$, $(\Lambda, 4\text{cm})$. Αν το μήκος της διακέντρου $K\Lambda$ των δύο κύκλων ισούται με 4cm , να βρείτε τη θέση τους.
3. Δίνονται οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά. Αν δίνεται ότι $R = (3x - 1)\text{cm}$, $\rho = x\text{cm}$ και η διάκεντρος $K\Lambda$ έχει μήκος $K\Lambda = 11\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος των ακτινών R και ρ .

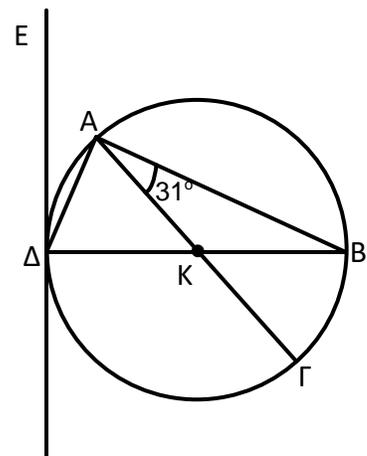
4. Δίνεται κύκλος (K, R) και γωνία $\widehat{B\Lambda\Delta} = 55^\circ$. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ω , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Αν η γωνία $\widehat{B\epsilon\Delta} = 68^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών α , β , γ , δ και το μέτρο του τόξου $\Delta\epsilon B$.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας.)

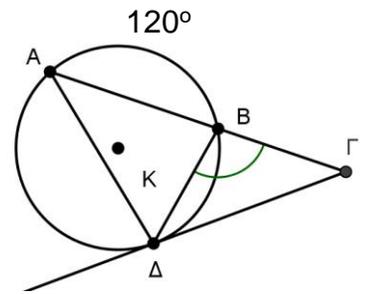


5. Στο διπλανό σχήμα $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροι του κύκλου (K, R) . Αν $\widehat{\Gamma\Lambda B} = 31^\circ$ και $\Delta\epsilon$ εφαπτομένη του κύκλου στο Δ , να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{\Delta\beta A}$, $\widehat{\Gamma\kappa\Delta}$ και $\widehat{A\delta\epsilon}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

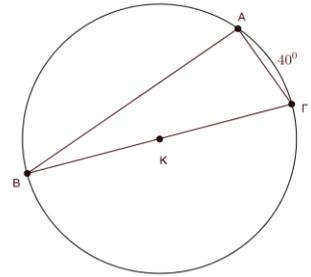


6. Στο διπλανό σχήμα η $\Delta\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (K,R) στο σημείο Δ , η γωνία $\hat{\Delta B\Gamma} = 100^\circ$ και το τόξο $\overset{\frown}{AB} = 120^\circ$.

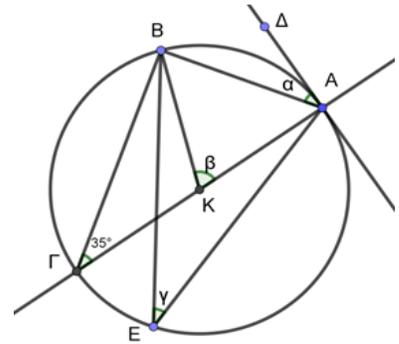
- (α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\overset{\Delta}{A}B\Delta$ και
 (β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B}\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.



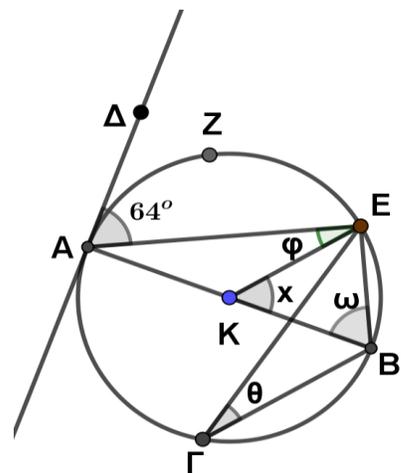
7. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κέντρου K και το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma} = 40^\circ$.
 Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



8. Στο διπλανό σχήμα η $A\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου (K,R) και $A\Gamma$ διάμετρος του κύκλου. Αν η γωνία $B\Gamma A = 35^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ .



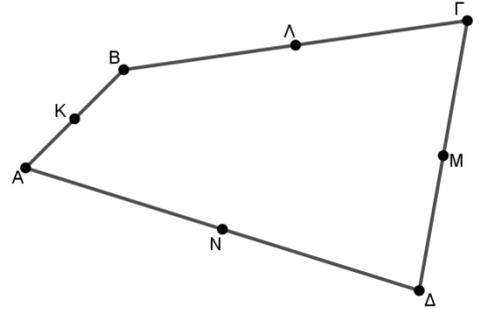
9. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο AB . Η ευθεία $A\Delta$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A και η γωνία $\Delta\hat{A}E = 64^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\omega}, \hat{\phi}, \hat{x}, \hat{\theta}$ και το τόξο AZE .



ΕΝΟΤΗΤΑ 4 :Διανύσματα

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$, $\vec{GB} = \vec{\beta}$ και $\vec{MG} = \vec{\gamma}$, να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.



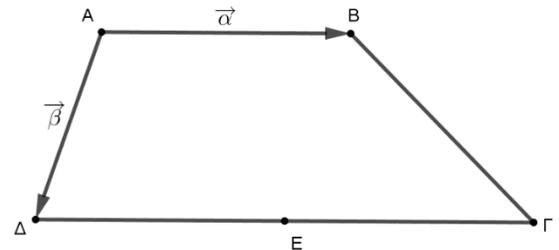
i) $\vec{DA} =$

ii) $\vec{AK} =$

iii) $\vec{MK} - \vec{AK} + \vec{AD} =$

iv) $\vec{MN} - \vec{MD} =$

3. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$, $(\Delta\Gamma) = 2(AB)$ και το σημείο Ε είναι το μέσον της πλευράς ΔΓ. Συμβολίζουμε $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{AD} = \vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:



(i) $\vec{BG} = \vec{AE} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(ii) Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

4. Δίνονται τυχαία τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΔ με Ε μέσο της ΒΓ.

(α) Να γράψετε:

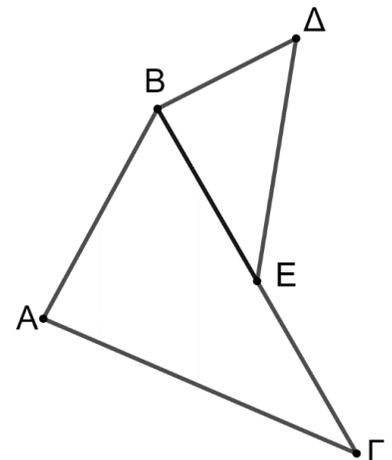
i) δύο ίσα διανύσματα

ii) δύο αντίθετα διανύσματα.

(β) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω διανύσματα:

i) $\vec{AB} + \vec{BG}$

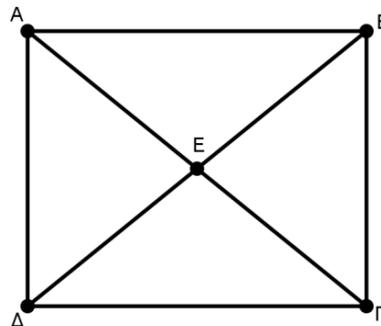
ii) $\vec{DE} - \vec{BE}$



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο

παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Gamma = 8\text{ cm}$ και
 E το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$.
 Να γράψετε ένα διάνυσμα:

- (α) ίσο με το διάνυσμα \overrightarrow{EA} :
- (β) αντίθετο με το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma B}$:
- (γ) αντίρροπο με το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta B}$ και να έχει μέτρο ίσο με 4 cm :
- (δ) που να ισούται με $\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} =$
- (ε) που να ισούται με $\overrightarrow{E\Gamma} - \overrightarrow{EB} =$



6. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ (O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων) και

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \vec{\alpha} \quad , \quad \overrightarrow{B\Gamma} = 2 \cdot \vec{\beta}$$

α. Να εκφράσετε τα πιο κάτω διανύσματα συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- i. $\overrightarrow{A\Delta}$
- ii. $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$
- iii. $\overrightarrow{A\Gamma}$
- iv. \overrightarrow{OA}
- v. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$

β. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών του παραλληλογράμμου AB

και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι τα διανύσματα \overrightarrow{MN} και \overrightarrow{OA} είναι αντίθετα

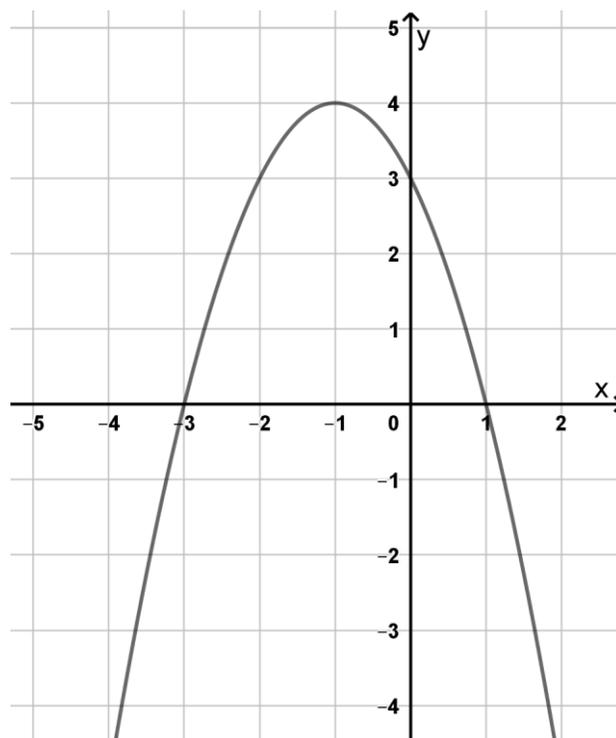
ΕΝΟΤΗΤΑ 05: Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, Εξισώσεις - Ανισώσεις

1. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού που έχει ρίζες $x_1=2$ και $x_2=5$.
2. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες: $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.
3. Να λύσετε τις ανισώσεις: (α) $3x(x+4) \leq 0$ (β) $3x^2 + 11x - 4 \geq 0$.
4. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \psi - \chi = 5 \\ \chi^2 + \chi\psi = -2 \end{cases}$$
5. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις (ρίζες) της εξίσωσης $2x^2 - 6x + 3 = 0$, να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:
 - (α) $x_1 + x_2$
 - (β) x_1x_2
 - (γ) $4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2$
 - (δ) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$
 - (ε) $(x_1 - x_2)^2$
7. Να απλοποιήσετε το κλάσμα:
$$\frac{4x^2 - 1}{2x^2 + 5x - 3}$$

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

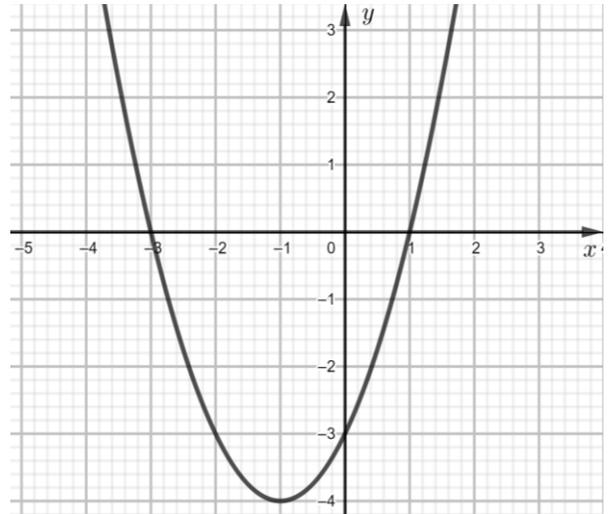
- (α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$
- (β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$
- (γ) το πρόσημο του a
- (δ) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
- (ε) την τιμή του γ
- (στ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (ζ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- (η) να αναφέρετε αν παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή
- (θ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- (ι) τις τιμές του χ για τις οποίες $f(\chi) > 0$



9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$
- (β) το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)$
- (γ) το πρόσημο του a
- (δ) την τιμή του γ
- (ε) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (στ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- (ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$



10. Δίνεται η παραβολή $f(x) = (x + 3)^2 - 1$.

- α) να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,
- β) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της,
- γ) να προσδιορίσετε αν η παραβολή έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

11. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + 1 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες (λύσεις) της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

- (α) Η εξίσωση έχει ρίζες ίσες
- (β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίθετες
- (γ) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφες
- (δ) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης ισούται με το γινόμενό τους
- (ε) Ισχύει $3x_1 - x_1x_2 + 3x_2 = 7$.

12. Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $-x^2 + (\mu - 3)x + \mu - 2 = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές του μ , $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε:
- α) η εξίσωση να έχει λύσεις αντίθετες
 - β) η εξίσωση να έχει λύσεις πραγματικές και ίσες
 - γ) να ισχύει η σχέση: $x_1^2 + x_2^2 > 10$
13. Για ποιες τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$ δεν έχει λύσεις πραγματικές.
14. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\lambda - 1)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 3$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες;