

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΑ

A/A	ΣΧΗΜΑ	ΟΡΙΣΜΟΣ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΚΡΙΤΗΡΙΑ
1.	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ 	Είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του $\parallel$	- Έχει τις απέναντι πλευρές του $\parallel$ - Έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες - Έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες - Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται	- Αν έχει τις απέναντι πλευρές του $\parallel$ - Αν έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες - Αν έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες - Αν οι διαγώνιοι του διχοτομούνται - Αν έχει δυο απέναντι πλευρές ίσες και $\parallel$
2.	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ 	Είναι το τετράπλευρο που έχει και τις τέσσερις γωνίες του ορθές	- Έχει όλες τις ιδιότητες του # - Οι διαγώνιοι του είναι ίσες - Οι γωνίες του είναι ορθές	- Τετράπλευρο που έχει τρεις γωνίες ορθές - Όλες τις γωνίες του ίσες - Αν είναι # και έχει 1 γωνιά ορθή - Αν είναι # και έχει τις διαγώνιους του ίσες
3.	ΡΟΜΒΟΣ 	Είναι το τετράπλευρο που έχει και τις τέσσερις πλευρές του ίσες	- Έχει όλες τις ιδιότητες του # - Όλες οι πλευρές του είναι ίσες - Οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα - Οι διαγώνιοι του διχοτομούν τις γωνίες του	- Αν έχει όλες τις πλευρές του ίσες - Αν είναι # και οι διαγώνιοι του τέμνονται κάθετα - Αν είναι # και η μια η διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνιά του - Αν είναι # και έχει 2 διαδοχικές πλευρές ίσες
4.	ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ 	Είναι το τετράπλευρο που έχει τις τέσσερις πλευρές ίσες και τις τέσσερις γωνίες ορθές	- Έχει όλες τις ιδιότητες του # - Όλες οι πλευρές του είναι ίσες - Όλες οι γωνίες του είναι ορθές - Οι διαγώνιες του είναι ίσες διχοτομούνται, τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του	- Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν είναι ορθογώνιο και ρόμβος ΤΡΟΠΟΣ ΠΟΥ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ✓ Αποδεικνύουμε ότι είναι # ✓ Αποδεικνύουμε ότι είναι ορθογώνιο: Διαγώνιοι ίσοι ή μια γωνιά ορθή ✓ Αποδεικνύουμε ότι είναι ρόμβος: Διαγώνιοι κάθετοι ή μια διαγώνιος να διχοτομεί μια γωνιά ή δυο διαδοχικές πλευρές ίσες
5.	ΤΡΑΠΕΖΙΟ 	Είναι το τετράπλευρο που έχει μόνο τις δυο πλευρές του $\parallel$	- Η διάμεσος του τραπέζιου είναι $\parallel$ με τις βάσεις του (Είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη $\parallel$ πλευρών του) - Η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεων $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$	- Αν ισχύει ο ορισμός ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ να ισχύει ένα επιπλέον - οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες - οι γωνίες μιας βάσης είναι ίσες - οι διαγώνιες είναι ίσες

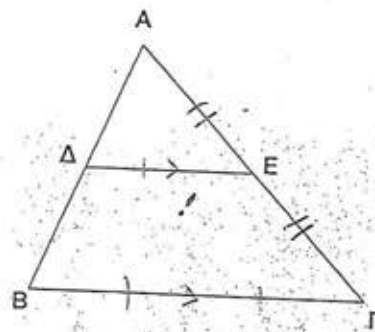
Εφαρμογές στα παραλληλόγραμμα

Εφαρμογές στα τρίγωνα

→ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } AG \end{array} \right\} DE \parallel \frac{BG}{2}$$



→ ΘΕΩΡΗΜΑ II

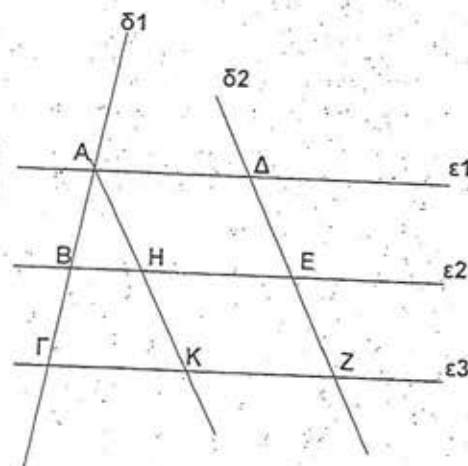
Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

→ ΘΕΩΡΗΜΑ III

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Αν } \epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3 \\ \text{και} \\ AB = BG \end{array} \right\}$$

$$\Delta E = EZ$$



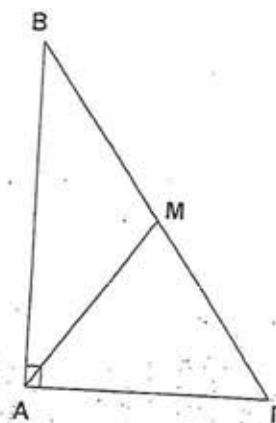
Ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου

➔ ΘΕΩΡΗΜΑ I

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΜ διάμεσος που
φέρουμε από γωνία 90°
δηλ. $BM = MG$

$$AM = \frac{BG}{2}$$



➔ ΘΕΩΡΗΜΑ II

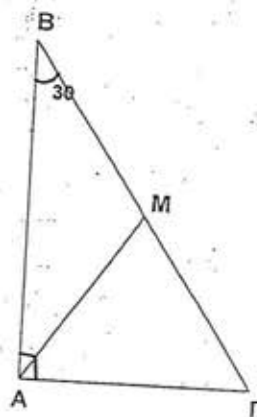
Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

➔ ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο
Β γωνία = 30°

$$AG = \frac{BG}{2}$$

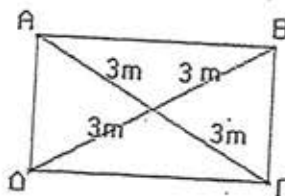
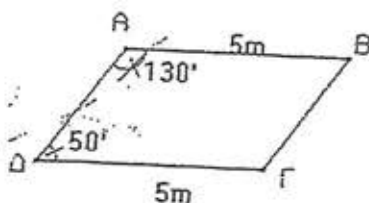


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ, ΤΡΑΠΕΖΙΑ, ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Να γράψετε το είδος του τετραπλεύρου και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

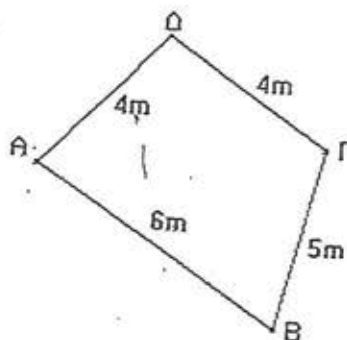
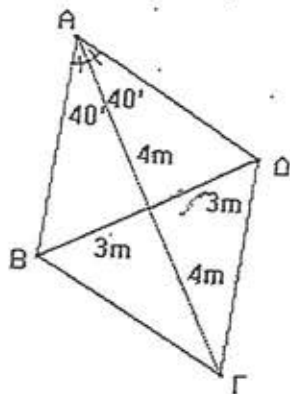
α)

β)



γ)

δ)



2. Να αντιστοιχίσετε:

Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.	Ορθογώνιο
Οι διαγώνιοι του είναι ίσοι και διχοτομούνται	Ρόμβος
Οι διαγώνιοι του είναι ίσοι και διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του	Παραλληλόγραμμο
Δύο απέναντι πλευρές παράλληλες	Τετράγωνο
Απέναντι γωνίες ίσες	Τραπεζίο

3. Γράψετε δυο κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο:

1).....

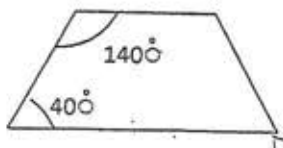
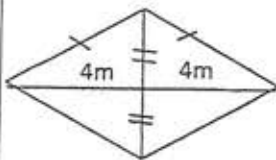
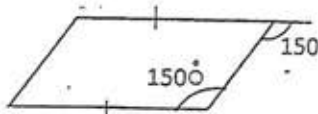
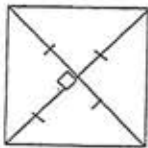
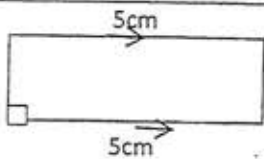
2).....

4. Να γράψετε δυο ιδιότητες του ρόμβου:

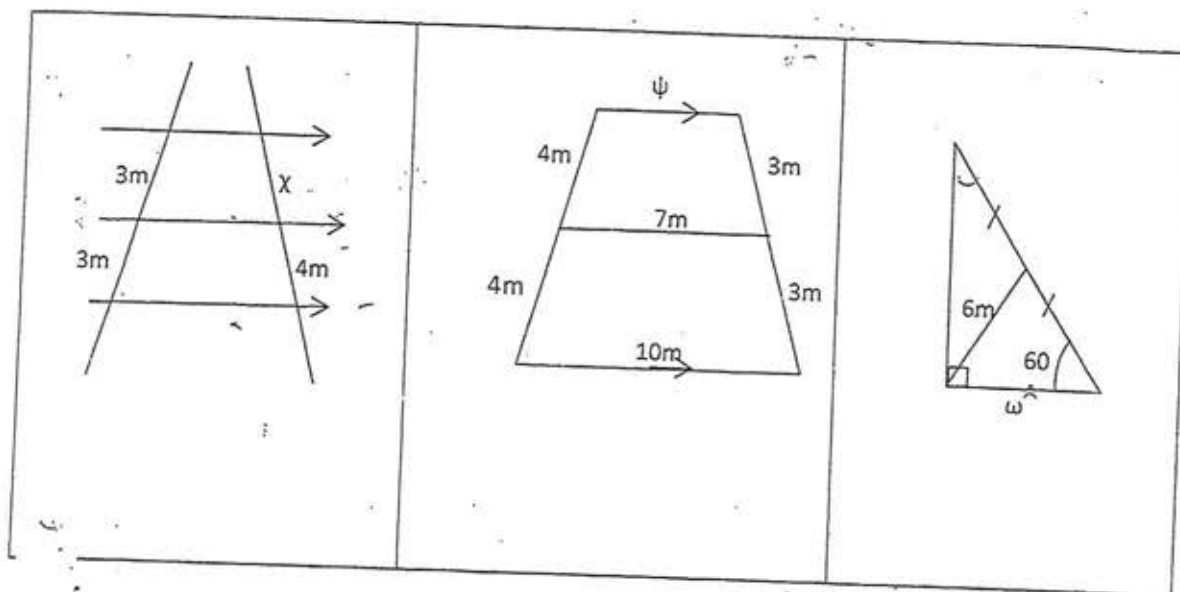
1).....

2).....

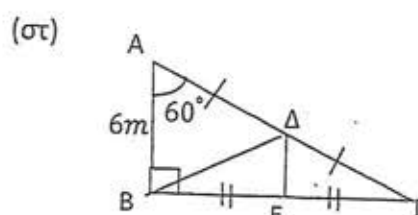
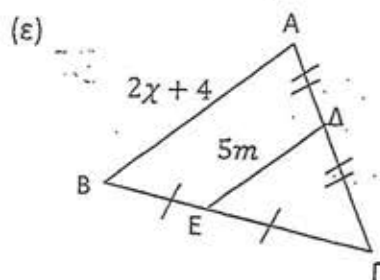
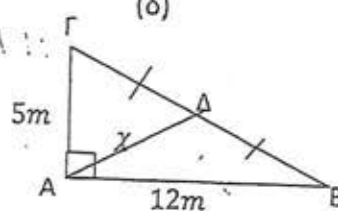
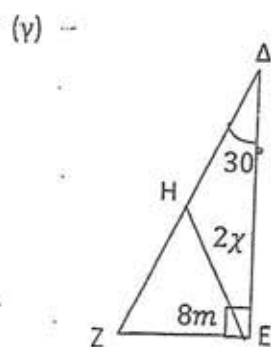
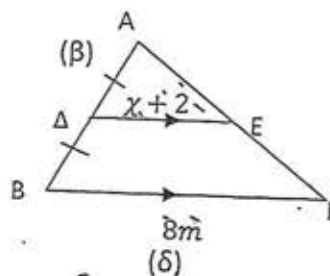
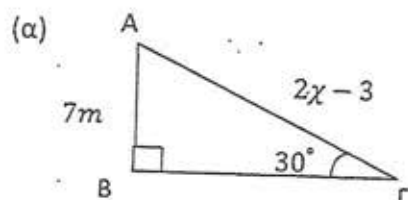
5. Να γράψετε το είδος του κάθε τετραπλεύρου, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



6. Να υπολογίσετε τα χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας:

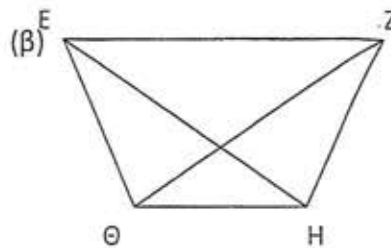
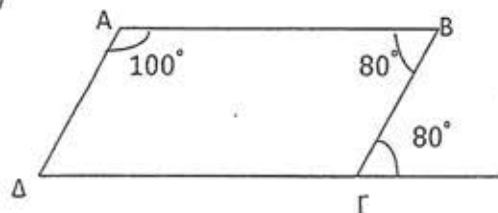


7. Να υπολογιστεί το χ στα πιο κάτω σχήματα.

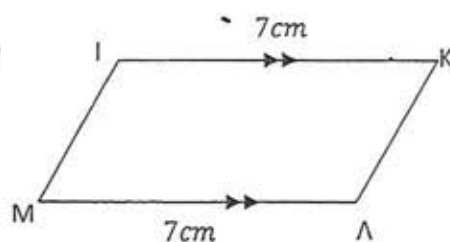


8. Ποιο από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα; (δικαιολογήστε)

(α)

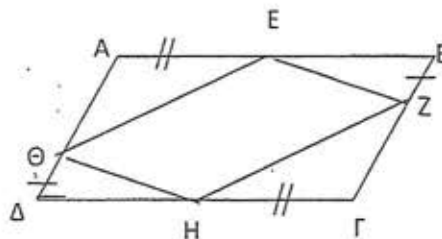


(γ)



9.

Δεδομένα	Ζητούμενα
ΑΒΓΔ #	ΕΖΗΘ #
ΑΕ = ΓΗ	
ΒΖ = ΔΘ	



10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{Α} = 90^\circ$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$. Να αποδείξετε αν $\hat{Β} = 15^\circ$, ότι $ΑΔ = \frac{ΒΓ}{4}$. (Υπόδειξη: Να φέρετε τη διάμεσο $ΑΜ$)

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $\Delta E = A\Gamma$.

12. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κορυφές ρόμβου (σχήμα, δεδομένα, ζητούμενα).

13. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, E είναι το μέσο της διαμέσου AD . Αν Z το μέσο του BD και H το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι το EZH είναι παραλληλόγραμμο. (σχήμα, δεδομένα, ζητούμενα)

14. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=90^\circ$ και $\Gamma=30^\circ$. Αν τα Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να προεκτείνετε την DE κατά τμήμα $EZ=DE$. Να δείξετε ότι το ΔBZA είναι ρόμβος.

15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $AD=AB$ και την $A\Gamma$ κατά τμήμα $AE=A\Gamma$. Να δείξετε ότι $B\Gamma DE$ είναι ορθογώνιο.

16. Να δειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου σχηματίζουν ρόμβο.

17. Να δειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ρόμβου σχηματίζουν ορθογώνιο.

18. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του AD . Αν E, Z, H είναι τα μέσα των BD, AD και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $DEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

19. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τραπεζίου είναι κορυφές ρόμβου.

20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E ένα σημείο στην προέκταση της διαμέσου AD τέτοιο, ώστε $DE=AD$. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ από τα δύο μέρη και παίρνουμε τμήματα $ZB=B\Gamma=\Gamma H$. Να δείξετε ότι:

(α) Το $AZEH$ είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Η διάμεσος BO του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $\frac{EH}{2}$.

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΑΞΗ: Α'

ΟΜΑΔΑ: Α'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

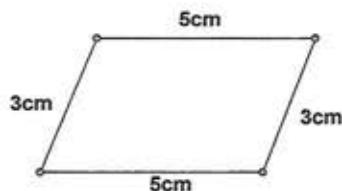
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

(μονάδες: 4/4/3/1/2/3/3)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις:

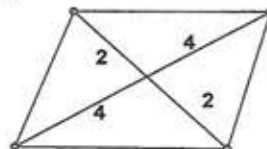
1. Να βρείτε πια από τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμο (να δώσετε τη δικαιολογία στο κενό χώρο).

α)



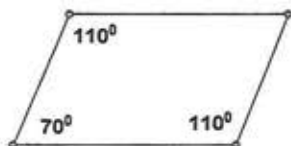
.....
.....

β)



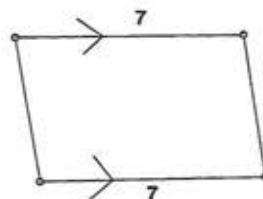
.....
.....

γ)



.....
.....

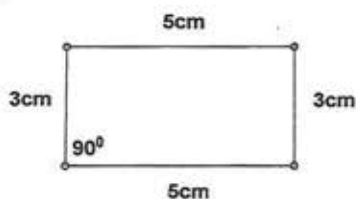
δ)



.....
.....

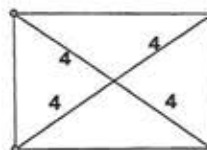
2. Να βρείτε σε κάθε περίπτωση τι είδους τετράπλευρο είναι το καθένα από τα παρακάτω (να δώσετε τη δικαιολογία στο κενό χώρο).

α)



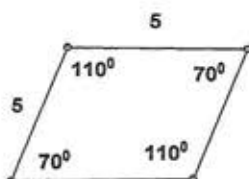
.....
.....

β)



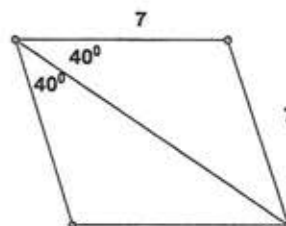
.....
.....

γ)



.....
.....

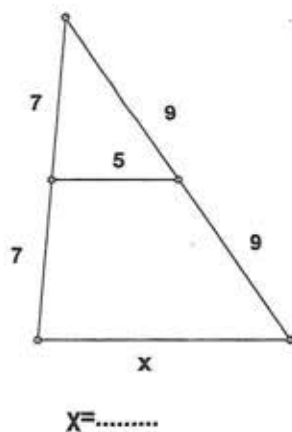
δ)



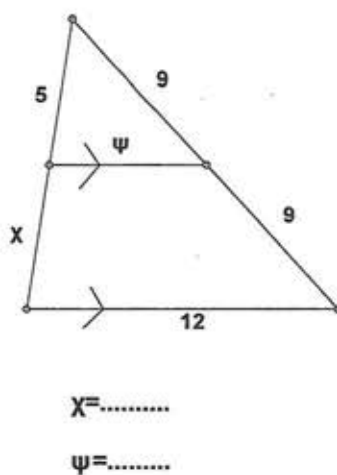
.....
.....

3. Να υπολογίσετε τα χ , ψ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

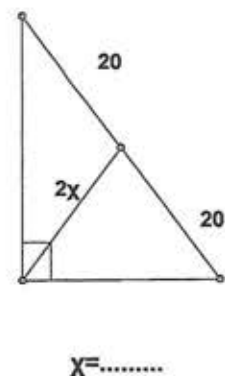
α)



β)



γ)



4. Να δώσετε τον ορισμό του Ρόμβου:

.....

5. Να γράψετε δύο ιδιότητες που τις έχει το ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ και δεν τις έχει ο ΡΟΜΒΟΣ.

A).....

B).....

6. Αποδείξτε ότι αν ένα τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

7 Να γράψετε δύο ιδιότητες που τις έχει ο Ρόμβος και όχι το Ορθογώνιο.

A).....

B).....

.....

8 Να δώσετε τον ορισμό του :

A) Παραλληλογράμμου.

.....

B) Τετραγώνου.

.....

9 Να γράψετε δύο ιδιότητες που τις έχει μόνο το ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ και το ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ.

A).....

B).....

10 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ , ώστε ΔΖ=ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{Z}\Gamma E = 90^0$.

|| Αποδείξτε ότι τα μέσα των πλευρών Ρόμβου είναι κορυφές ορθογωνίου.

12 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $\Gamma\Delta$ και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Αν EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z να αποδείξετε ότι το $\Delta E\Gamma Z$ είναι ρόμβος.

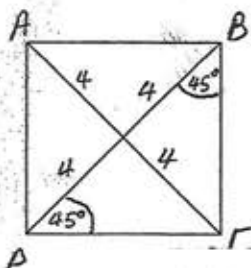
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1) α) Τι είναι παραλληλόγραμμο;

β) Αναφέρετε δύο ιδιότητες του παραλληλογράμμου

(μ.2)

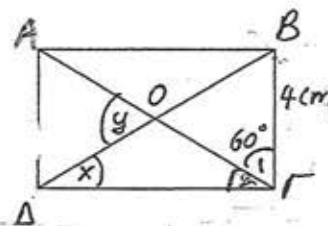
2) Να εξετάσετε αν το πιο κάτω τετράπλευρο είναι τετράγωνο
(Δικαιολογίες)



(μ.2)

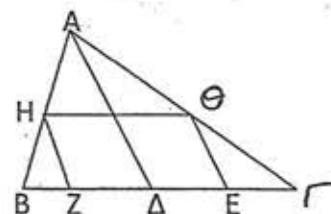
3) Από το διπλανό ορθογώνιο να υπολογίσετε
τα ζητούμενα (δικαιολογίες)

Ζητούμενα
x, y
ΑΓ, ΟΒ



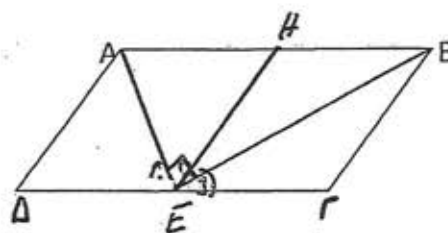
(μ.4)

4) Στο τρίγωνο ABΓ, Δ είναι τυχαίο σημείο
της ΒΓ. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των
ΓΔ, ΒΔ, ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδειχθεί
ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.



(μ.4)

5) Δεδομένα	Ζητούμενα
ΑΒΓΔ #	ΕΗΒΓ ρόμβος
Ε μέσο ΓΔ	
Η μέσο ΑΒ	
$\angle \text{ΑΕΒ} = 90^\circ$	



(μ.4)

6) Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραγώνου ορίζουν τετράγωνο

(μ.4)

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣ

ΣΧΟΛ.ΧΡ.2013-14

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΑΘΜΟΣ: 1

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΤΑΞΗ : Γ2

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

Υπογρ. Κηδεμόνα:

ΟΜΑΔΑ Α

ΟΛΕΣ ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΑΣ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΛΗΡΩΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΜΕΝΕΣ

1.Να βάλετε (X) κάτω από τη στήλη με τη σωστή απάντηση σας, στις πιο κάτω προτάσεις: (Μ.10)

	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
Ισοσκελές Τραπέζιο είναι το τετράπλευρο που έχει δυο μόνο πλευρές παράλληλες.		
Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοι του είναι κάθετες.		
Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του είναι ίσες.		
Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες και άνισες.		

2. α) Ορθογώνιο είναι το τετράπλευρο .

.....
.....

β) Τι είναι Ρόμβος ;

.....

γ) Να γράψετε τέσσερα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο:

i)

ii)

iii)

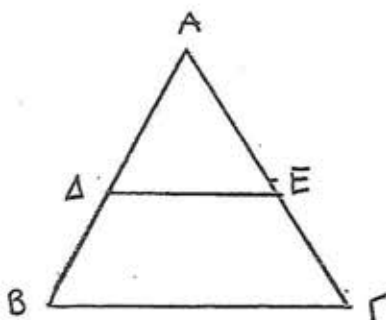
iv)

(Μ.20)

3. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία

$A(2,1)$, $B(3,3)$, $\Gamma(5,1)$ και $\Delta(3,-1)$ είναι ορθογώνιο; (Μ.20)

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι το $\Delta E\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μ.10)



5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 20$ cm. Να φέρετε την διάμεσο AM και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $MD=AM$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma D$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε την περίμετρο του.

(Μ.20)

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma D$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη $D\Gamma$ στο σημείο H . Να δείξετε ότι $DH=B\Gamma$. (Μ.20)