

Επαναληπτικές Ασκήσεις στις Απόλυτες Τιμές

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $|4x - 1| = 3$

(β) $|-2x + 3| = 1$

(γ) $|4x - 1| = |x - 2|$

(δ) $|-x - 1| = |x - 2|$

(ε) $|4x - 1| = -x + 2$

(στ) $|2x - 1| = x - 4$

(ζ) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

2. Να γραφούν οι πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές:

(α) $A = |3x - 6| - x - 4$

(β) $B = |-2x + 5| + 3x - 1$

(γ) $\Gamma = |-2x + 6| - |x - 1| - 2x + 3$

(δ) $\Delta = |x^2 - 5x + 6|$

3. Να λυθούν οι πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $|3x - 6| \leq 3$

(β) $|-x + 2| > 4$

(γ) $|3x - 6| \leq x - 1$

(δ) $|2x^2 - 3x - 2| \leq 0$

(ε) $|x^2 - 4x - 5| > 0$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

i. Με χρήση ιδιοτήτων

α) $|x - 5| = 4$

β) $|3x + 1| = |-x + 7|$

ii. Χωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους

α) $|x - 1| - 4 = 5 - 2|x - 1|$

β) $3|2x + 1| - 7 = |4x + 2| - 6$

iii. Με χρήση της ιδ. $|x|^2 = x^2$

α) $x^2 - |x| - 2 = 0$

iv. Με χρήση του ορισμού

α) $4x - 5|x - 3| = 3$

β) $x^2 + 4x + 2|1 - x| = 10$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Ισχύουν οι ίδιες περιπτώσεις με τις εξισώσεις.

α) $|2x - 3| > 5$

β) $3|x + 5| \leq 12$

γ) $5|2x - 3| - 1 < 3|2x - 3| + 7$

δ) $3|x - 1| - x < 5$

ε) $x^2 - 3|x| - 10 \leq 0$

ζ) $|-x + 3| \leq 2|x + 6|$

A. ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να γραφτούν χωρίς απόλυτα οι παραστάσεις

$$\alpha) A = |x^2 + 5|$$

$$\beta) B = |x - 3|$$

$$\gamma) \Gamma = |x^2 - 3x + 2|$$

$$\delta) \Delta = |x^2 - x + 2| + 2|-x^2 - 1| + 3x - 1 + |x|^2$$

2) Αν $-3 < x < 2$ να γραφτεί χωρίς απόλυτα

$$A = |x - 2| - 3|x + 3| + |x^2 + x - 6|$$

3) Αν $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \varepsilon\phi\chi \sqrt{\varepsilon\phi^2\chi} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}$$

Α. Να γραφούν χωρίς απόλυτη τιμή

1) $|2\pi - 4| + |7 - 2 \cdot \pi|$

2) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{5} - \sqrt{2}| + |3 - \sqrt{5}|$

3) $|x^2 - 6 \cdot x + 9| + |x| + 1$

4) $|P(A)| + |P(A) - 1|$

5) $|P(A \cap B) - P(A)| + |P(A \cup B) - P(B)| + |P(A) - P(A - B)| + |P(A \cap B)|$

6) $|x - |x|| + ||x| + x|$

7) $|x + 2| + x$

8) $\frac{x^2 + 2 \cdot |x|}{|x| + 2}$

9) $\frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$

Β. Να συμπληρωθούν οι ισότητες χωρίς απόλυτες τιμές

1) Αν $\alpha < 0 < \beta$ τότε $|\alpha| + |\beta| + |\alpha - \beta| - |-2 \cdot \alpha| = \dots\dots\dots$

2) Αν $\alpha \in (0, 2)$ τότε $|\alpha^2 - 2 \cdot \alpha| = \dots\dots\dots$

3) Αν $x \in (-4, -1)$ τότε $|x + 4| - |2 \cdot x + 2| + |3 \cdot x| = \dots\dots\dots$

4) Αν $x \in (-2, 3)$ τότε $|5 - |x - 3|| = \dots\dots\dots$

5) Αν $x \neq 0$ τότε $\frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{x} = \dots\dots\dots$

Γ. Αποδεικτικές ασκήσεις

1) Αν $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$.

2) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2 \cdot |\alpha \cdot \beta|$ για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β .

3) Έστω $\alpha \cdot \beta \neq 0$ και $\frac{|\beta|}{\alpha} - \frac{\beta}{|\alpha|} = 0$. Να αποδείξετε ότι α, β ομόσημοι.

4) Έστω $\alpha \cdot \beta \neq 0$ και $\alpha \cdot |\beta| + \beta \cdot |\alpha| = 0$. Να αποδείξετε ότι α, β ετερόσημοι.

5) Αν $x \neq 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\left(1 + \frac{|x|}{x}\right) \cdot (x - |x|) = 0$.

6) Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta + |\alpha \cdot \beta| \geq |\alpha| \cdot \beta + \alpha \cdot |\beta|$ για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β .

7) Να αποδείξετε ότι $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, 3) + d(3, \beta)$ για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β .

8) Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$, να αποδείξετε ότι $|3 \cdot x + y| \leq 9$.

Δ. ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

1) Να λυθούν γραφικά οι παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις

α) $|x - 3| = 4$

β) $|x + 2| = 5$

γ) $|x - 5| < 2$

δ) $|x + 1| \geq 5$

2) Να λυθούν αλγεβρικά οι παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις

α) $|2 \cdot x - 3| = 7$

β) $|x + 2| + |x - 3| = 0$

γ) $|3 \cdot x - 2| = -1$

δ) $|x - 2| \leq 3$

ε) $|x + 4| > 1$

στ) $|x - 5| \leq -3$

ζ) $|x + 1| > -2011$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$α. |3-2x|=7 \quad b. |3x+1|=2 \quad c. |2x+3|=|3-4x| \quad d. |x-2|=x-2$$

$$e. |2x+1|=-2x-1 \quad f. |3x-2|+|2-y|=0 \quad g. (x-1)^2=2\cdot|1-x|$$

$$h. \frac{|1-2x|}{3} - \frac{2-|2x-1|}{4} = 1 - \frac{1-|2x-1|}{12} \quad i. \frac{|3x-6|}{2} - \frac{1-|4-2x|}{3} = 0$$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των συνθηκών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

$$A = |x-2| - |3-x| + 2|-x|, \quad \text{αν } 2 < x < 3.$$

$$B = |x+2| - 2|x+3| + 5|x| - |x+1|, \quad \text{αν } -3 < x < -2.$$

$$\Gamma = |a-x| - |b-y| - |a-b| - |y-x|, \quad \text{αν } x < a < y < b.$$

3. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές

$$A = 3x - |x-2| \quad B = |2x-1| - x + 1$$

$$\Gamma = |x-2|^2 - |1-x|^2 + |x+1| \quad \Delta = |2-|x||$$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις

$$a. |3x-2| \leq 5 \quad b. |2-x| \geq 3 \quad c. |x-2| + |3-2x| \leq 0$$

$$d. |2x+3| < -2 \quad e. |3-2x| > -4 \quad f. -1 \leq 2x-1 \leq 3$$

$$g. 3 < |2x-5| < 7 \quad h. \frac{2-|x-1|}{3} - \frac{1-|3-3x|}{2} \leq 1 \quad i. 1 \leq d(x, -3) \leq 2$$

5. Αν γνωρίζετε ότι $|a|=3$ και $|b|=2$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων: $|a-2b|$, $|4-a|+|b-2|$.

6. Αν ισχύει $|3a-2b| < |2a-3b|$, να αποδείξετε ότι: $|a| < |b|$.

7. Αν ισχύει $-3 < x < 0$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = |x^2+3x| - |x+2| + |x-1|$ και $B = x|x-2| + |x^2-4x+4| + 6|x|$ και $\Gamma = |x-x^2| - |4x+12| - |x||3-|x||$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις: $a. |3-|x|| = 5$ και $b. ||x-1|-4| = 2$

9. α. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-3| < |4+2x|$

γ. Αν τα για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύουν οι σχέσεις:

$|a| \neq |b|$ και $1 + |ab| < |a+b|$, να αποδείξετε ότι: $|a| < 1 < |b|$ ή $|b| < 1 < |a|$.

10. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει ότι: $|a+b| < |a-b|$, να αποδείξετε ότι:

α. Οι a και b είναι ετερόσημοι.

β. Ισχύει η σχέση: $a|b| + b|a| = 0$

γ. Αν επιπλέον των προηγούμενων σχέσεων ισχύει ότι $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 = 0$, να αποδείξετε ότι $a < 0$ και $b < 0$.

11. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|x| < 2$, $|y-3| < 1005$ και $|3x-z| < 4$ να αποδείξετε ότι: $|xy-z| < 2014$

12. α. Να αποδείξετε ότι αν για τους πραγματικούς αριθμούς a και b ισχύει μία από τις σχέσεις:

$|a| + |b| = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $|a| + |b| \leq 0$, αποδείξετε ότι $a=b=0$.

β. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις:

i. $|2x-1| + |3-x| = 0$ ii. $|x^2-2x| + |x^2-4| = 0$ iii. $|x-2| + |y+3| \leq 0$

13. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = xy + 3x - y - 3$, $B = 4x + y - 4 - xy$, $\Gamma = 2 - 2x$

α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ποσότητας $|A| + |B| + |\Gamma|$.

β. Για ποια τιμή του x η ποσότητα παίρνει την ελάχιστη τιμή της;