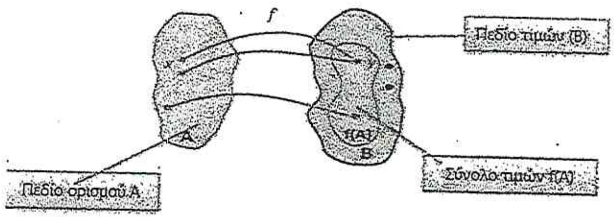
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ- Β' ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Δίνεται συνάρτηση $f: A \to B$ με $f(\chi) = 2\chi + 1$ και πεδίο ορισμού $A = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f και να γράψετε το γράφημα της.



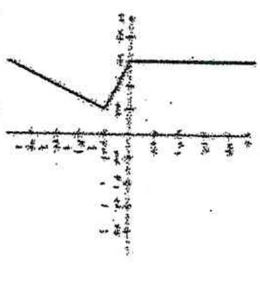
ΟΡΙΣΜΟΣ : Για να είναι μια αντιστοιχία συνάρτηση πρέπει **κάθε** στοιχείο του συνόλου Α να αντιστοιχεί **σε μόνο ένα** στοιχείο του συνόλου Β.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Γράφημα συνάρτησης $f: A \to B$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $x \epsilon A$, $y \in B$ για τα οποία ισχύει $\psi = f(x)$ και συμβολίζεται με G.

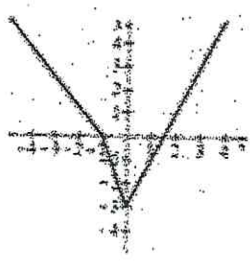
ΑΣΚΗΣΗ 2:

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων, για τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις.

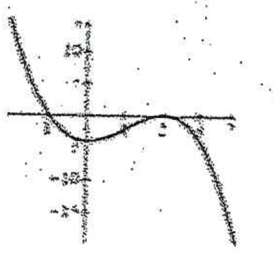
(α)



(β)



(γ)



Πεδίο Ορισμού είναι το σύνολο των τιμών του χ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση. D_f

Σύνολο τιμών είναι το σύνολο των εικόνων των στοιχείων του πεδίου ορισμού. R_f

(ii) Ποιες από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις είναι 1-1. Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

Μια συνάρτηση είναι 1-1 , όταν για δύο διαφορετικά στοιχεία του Π.Ο έχουν διαφορετικές τιμές.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που ορίζονται από τους τύπους:

α) $\psi = \sqrt{x^2+1}$ β) $\psi = \frac{2\chi-4}{\sqrt{\chi+1}}$

γ) $\psi = \sqrt{|\chi|-1} + \frac{1}{\sqrt{\chi-2}}$ δ) $\psi = \frac{\sqrt{\chi}}{\chi^2-9}$

Όταν το **πεδίο ορισμού δεν δίνεται** τότε πεδίο ορισμού της συνάρτησης ορίζεται ως το ευρύτερο **δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για το οποίο οι τιμές της συνάρτησης να είναι πραγματικοί αριθμοί.**

- Αν είναι πολυωνυμική π.χ $f(x) = 2x^2+3x-1$ τότε το πεδίο ορισμού είναι το R.
- Αν είναι ρητή π.χ $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ τότε εξαιρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
- Αν εμφανίζεται ρίζα π.χ $f(x) = \sqrt{\chi+2}$ τότε εξαιρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς που μας δίνουν αρνητικό υπόριζο.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες , περιττές ή τίποτα από τα δύο και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(i) $f(x) = \sqrt{x-1}$ **(ii)** $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+1 & x \leq -1 \\ -x^2+3x-1 & x \geq 1 \end{cases}$

- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ ονομάζεται άρτια, όταν για $\forall x \in A$ ισχύει: $-x \in A \;\kappa\alpha\iota\; f(-x) = f(x)$
- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ ονομάζεται περιττή, όταν για $\forall x \in A$ ισχύει: $-x \in A \;\kappa\alpha\iota\; f(-x) = -f(x)$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

> Για να βρούμε **σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης όταν μας δίνουν τον τύπο
> - **Επιλύουμε** ως προς χ
> - **Περιορίζουμε το χ στο πεδίο ορισμού της f** και υπολογίζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει το y

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x+1$

(β) $g:[3,7]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2x+1$

(γ) $y = x^2-5x+4$, $x\epsilon\mathbb{R}$ (να κάνετε και γραφική παράσταση για επαλήθευση)

(δ) $y = 2|x-2|+3$, $x\epsilon\mathbb{R}$

(ε) $y = \frac{x-2}{3-x}$, $x\epsilon(-\infty,2)$

(στ) $y = \frac{x^2}{2-4x}$

(ζ) $y = \sqrt{\frac{1}{x}+4}$

(η) Δίνεται η συνάρτηση $f:[-3,3]\to[-1,22]$, $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -3\leq x<1 \\ x^2+ax, & 1\leq x\leq 3\end{cases}$

(i) Αν $f(-2)+f(1)=6$ να δείξετε ότι το $\alpha = 4$

(ii) Να αναφέρετε πότε μια συνάρτηση ονομάζεται *επί συνάρτηση* και να εξετάσετε αν η f είναι *επί*.

ΑΣΚΗΣΗ 6

> Για να ορίζονται οι πράξεις συναρτήσεων πρέπει η **τομή** του πεδίου ορισμού της συνάρτησής f και της g να μην είναι το κενό σύνολο.
> $A \cap B \neq \emptyset$

(α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$f(x) = -3x + 1$ και $g: [3, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 4x + 1$

Να βρείτε το σύνολο τιμών τους και τις συναρτήσεις

$f + g, f - g, f \cdot g$.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \frac{\chi}{\chi+3}$ και $g(x) = 2\chi - 1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να εξετάστε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και να τις παραστήσετε γραφικά.

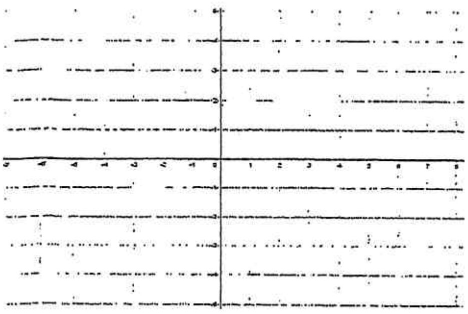
(α) $f(x) = |\chi + 2|,\ \chi\epsilon\mathbb{R}$

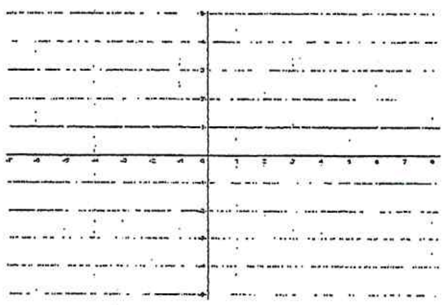
(β) $g(x) = |\chi + 2| - \chi,\ \chi\epsilon\mathbb{R}$

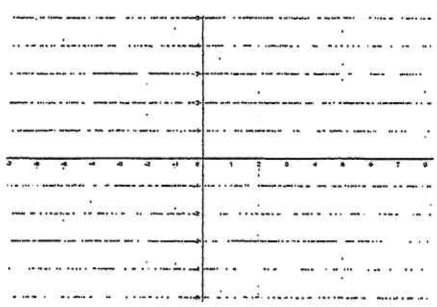
(γ) $h(x) = |\chi^2|, \chi\epsilon\mathbb{R}$

(δ) $\kappa(x) = |\chi| + |\chi - 1|, \chi\epsilon\mathbb{R}$

(ε) $\rho(x) = |\chi| + |-\chi|, \chi\epsilon\mathbb{R}$







ΑΣΚΗΣΗ 8:

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, να είναι ίσες:

> Δυο συναρτήσεις :
> $f_1: A_1 \to B_1$ και $f_2: A_2 \to B_2$
> Είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν
> - Το ίδιο πεδίο ορισμού
> - Το ίδιο πεδίο τιμών
> - Τις ίδιες τιμές για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους.

(α) $f(\chi) = \frac{\chi^2-25}{\chi-5}$, $\quad g(\chi) = \chi + 5$

(β) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$ και $g(x) = \frac{x-1}{2x}$

(γ) $f(\chi) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$, $\quad g(\chi) = x - 2$

(δ) $f(\chi) = x^2 + x + 1$, $\quad g(\chi) = 2x + 7$

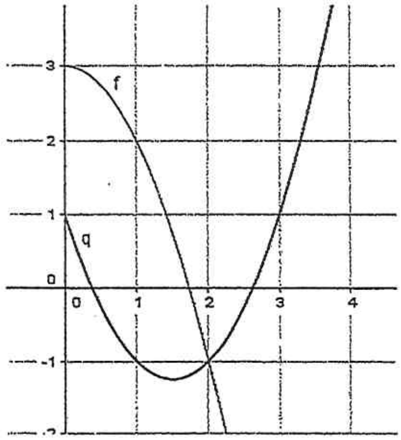
(ε) $f(\chi) = \sqrt{\chi - 3}$, $\quad g(\chi) = \sqrt{3 - \chi}$

(στ) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$, $\quad g(x) = |x - 2|$

(ζ) Να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα $\sqrt{\chi^2 - 16} = \sqrt{\chi - 4} \cdot \sqrt{\chi + 4}$

ΑΣΚΗΣΗ 9:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και q φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

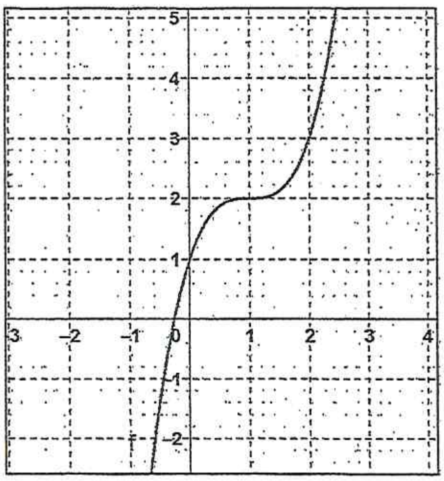


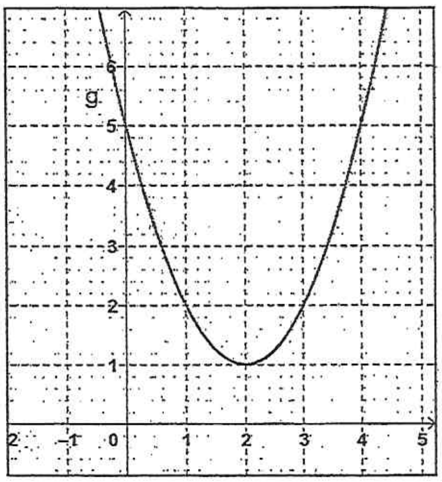
Να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

(1) $(f+q)(0) =$

(2) $(f \circ q)(3) =$

ΑΣΚΗΣΗ 10:





Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

(α) Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f και g

(β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1

(γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τις πιο κάτω τιμές:

(i) $(f+g)(0)$ (ii) $(g^{\circ}f)(2)$

(iii) $(f^{-1})(1)$ (iv) $(g^{-1})(2)$

(v) $(g^{\circ}g)(3)$ (vi) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(2)$

ΑΣΚΗΣΗ 11:

(α) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \sqrt{x} + 1$, και $g(\chi) = \sqrt{1 - x^2}$. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $(g \circ f)(x)$.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\chi) = \sqrt{4 - \chi^2}$ και $g(\chi) = \sqrt{\chi - 1}$. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $(g \circ f)(x)$.

Δυο συναρτήσεις :

$f\colon A \to \mathbb{R}$ και $g\colon B \to \mathbb{R}$

$(g \, o \, f)(x) = g(f(x))$ ονομάζεται η f σύνθεση g μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A' όπου

$A' = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\} \neq \emptyset$

Ομοίως

$(f \, o \, g)(x) = f(g(x))$ ονομάζεται η g σύνθεση f μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A' όπου

$A' = \{x \in B \text{ και } g(x) \in A\} \neq \emptyset$

ΑΣΚΗΣΗ 12:

(α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$f(x) = \sqrt{x-1} + 2,\ f: A \to f(A)$.
Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f. Αν ορίζεται η f^{-1} να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

(β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$f(x) = \frac{2\chi-1}{\chi-5}\ ,\ \chi < 3\ ,\ f: A \to f(A)$.Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f. Αν ορίζεται η f^{-1} να βρείτε τον τύπο της, το πεδίο ορισμού.

(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η αντίστροφη της $f: A \to f(A)$ με τύπο
$f(x) = x^2 + 4x - 5$, όπου $A = (-2, +\infty)$.
Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

$f: A \to B$ (Α=πεδίο ορισμού, Β= Πεδίο τιμών)

Για να υπάρχει η f^{-1} πρέπει η f
- ✓ να είναι 1-1
- ✓ να είναι επί

➢ Για να ελέγξω αν είναι 1-1 πρέπει:
$\forall\, x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 \neq x_2 => f(x_1) \neq f(x_1)$
ή
$\forall\, x_1, x_2 \in A\ ,\ f(x_1) = f(x_1) => x_1 = x_2$

➢ Για να είναι επί πρέπει:
$f(A) = B$

Προσοχή : Βρίσκουμε το **Σύνολο τιμών της** f γιατί θα γίνει **Πεδίο Ορισμού της** f^{-1}.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο

   α) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$

   β) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

   γ) $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x-1}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

   α) $f(x)=2x^2+4x+3$

   β) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$

   γ) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x-1}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-4}$. Να βρείτε:

   α) το πεδίο ορισμού της

   β) το ~~πεδίο~~ σύνολο τιμών της

   γ) την τιμή $f^{-1}(2)$.

4. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ με $x\geq 3$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+4$ και $g(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x+1}$. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι ίσες. Στην περίπτωση που είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R για το οποίο είναι $f(x)=g(x)$.

6. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f με τύπο $\psi=\chi^2+4\chi-5$, $\chi\in[-2,+\infty)$. Αν ορίζεται η f^{-1} να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=x^2+9$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $h=f\circ g$ και $k=\dfrac{f}{g}$, να βρείτε τον τύπο τους και το πεδίο ορισμού τους.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x-2$ με $x>1$ και $g(x)=\sqrt{4x-x^2}$, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $h=g\circ f$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-3}$ και $g(x)=\dfrac{4}{x-3}$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

~~10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης~~ $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$ καθώς επίσης και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{|x|-3}$ και g με τύπο $g(x)=\dfrac{|x|-2}{x^2-9}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f-g$ και $\dfrac{f}{g}$.

12. Αν $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$ και $g(x)=\dfrac{x-2}{3-x}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ και το πεδίο ορισμού τους.

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x-8}{4-x^2}$ και $g(x)=x+2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και $g(x)$.

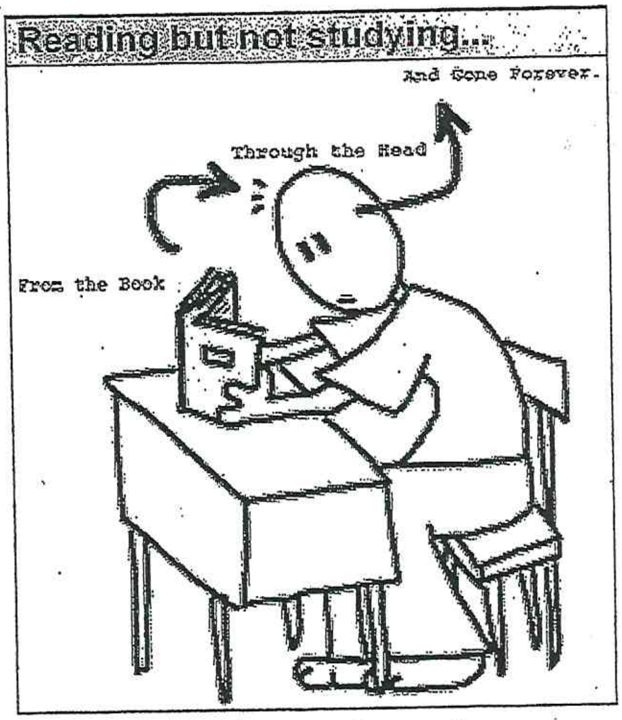
β) Να δείξετε ότι $(f\cdot g)(x)=\dfrac{x-8}{2-x}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το ~~πεδίο~~ Σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $(f\cdot g)^{-1}$.

14. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $\psi=\ln(x-3)$ ii) $\psi=\sqrt{x^2-10x+9}$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ με τύπο $\psi=\dfrac{x-1}{x-2}$ και $\chi>3$. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.



Καλό Διάβασμα!