Ρίζες – Επαναληπτικές ασκήσεις

ΜΕΡΟΣ Α:

1. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:

   Α.. $\alpha < \beta < \gamma$ Β. $\alpha < \gamma < \beta$ Γ. $\gamma < \alpha < \beta$ Δ. $\beta < \gamma < \alpha$ Ε. $\beta < \alpha < \gamma$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $\sqrt{10 - x} = 4$ (β) $\sqrt[4]{2x - 8} = 2$ (γ) $\sqrt{25 - x^2} - 3 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $x^4 - 625 = 0$ (β) $x^5 + 32 = 0$ (γ) $x^5 - 81x = 0$

   (δ) $(x - 2)^4 - 216(x - 2) = 0$

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

   (α) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ (β) $5 + \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{5}$ (γ) $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

   (α) $\sqrt{x - 2} = 5$ (β) $\sqrt{x - 5} = -2$ (γ) $\sqrt[3]{5 - x} = 3$

6. Αν $a_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ και $a_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

   (α) $a_1 > a_2$ (β) $a_1 a_2 = 1$ (γ) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 6$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις (με την προϋπόθεση ότι ορίζονται):

(α) $4\sqrt{63}+5\sqrt{7}-8\sqrt{28}=$

(β) $\left(2\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)=$

(γ) $\sqrt{4\chi}-\sqrt{9\chi}+\sqrt{16\chi}=$

(δ) $\sqrt{2\alpha^2}-\sqrt{8\alpha^2}+\sqrt{18\alpha^2}\ ,\ \alpha\geq 0$

8. Να μετατραπούν οι παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες χωρίς ριζικά στον παρονομαστή

(α) $\frac{4}{\sqrt[5]{2^3}}$

(β) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(γ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{5}{2}$$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(β) $\sqrt{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{7}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+2}}$

(γ) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{4}}\cdot\sqrt[4]{6+\sqrt{4}}$

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $16^{-\frac{3}{4}}\,8^{-\frac{1}{6}}\,2^{\frac{1}{2}}$

(β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2}$

(γ) $\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2\sqrt{8}}}$

(δ) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{4}$

(ε) $\sqrt[12]{2^{11}} : \sqrt[4]{2^3}$

(στ) $4\sqrt[3]{12} : \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

12. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=6$

13. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(3+\sqrt{5})^2}-\frac{1}{(3-\sqrt{5})^2}=-\frac{3\sqrt{5}}{4}$

14. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{(5-\sqrt{7})^2}-\frac{1}{(5+\sqrt{7})^2}=\frac{5\sqrt{7}}{81}$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{3}{2}} = 81, x \geq 0$

(β) $x^{\frac{3}{4}} + 5 = 69, x \geq 0$

(γ) $x^{\frac{4}{3}} + 3 = 4, x \geq 0$

(δ) $(3x + 1)^{\frac{5}{2}} = 32, x \geq -\frac{1}{3}$

(ε) $(3x + 1)^{\frac{2}{5}} = 4, x \geq -\frac{1}{3}$

(στ) $(5x - 1)^{\frac{4}{3}} = 256, x \geq \frac{1}{5}$

16. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x + 10} = 2 - x$

(β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0$

(γ) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0$

1. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής. Να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα. Όλες οι απαντήσεις να δοθούν με ρητό παρονομαστή. (20 μον.)

(α) $\frac{5}{\sqrt{3}}=$

(β) $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}=$

(γ) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$

(δ) $5\sqrt{5}+2\sqrt{20}-\sqrt{45}=$

(ε) $\sqrt[3]{2^{16}} \div 2^{\frac{7}{3}} + \sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-2}} =$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις: (25 μον.)

(α) $x^3=-125$

(β) $x^5-81x=0$

(γ) $\sqrt[5]{2x-1}=2\,,x\geq\frac{1}{2}$

(δ) $(3-x)^{\frac{4}{3}}+1=17, x\leq 3$

(ε) $\sqrt{x+7}=-5\,,x\geq-7$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις: (10 μον.)

(α) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x^2-9}=0$

(β) $\sqrt{7-2x}-x+2=0$

4. Αν $3<x<5$ και $-4<y<-2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: (15 μον.)

(α) $2x+y$

(β) $x-\frac{4}{y}$

(γ) $x\cdot y$

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι $\hat{A}=90^o\,, AB=\sqrt{3}m\,, E_{AB\Gamma}=\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (5 μον.)

<u>BONUS</u> (για όσους έχουν χρόνο): Αν $x>1$, να δείξετε ότι $\frac{x+1}{1-x}<1$ (5 μον.)

6. (α) Να δώσετε τον ορισμό της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού.

(β) Να αποδείξετε την μεταβατική ιδιότητα διάταξης των πραγματικών αριθμών:

Αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$ για κάθε $x, y, z \in R$. (5 μον.)

7. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση: (10 μον.)

(α) Αν $x < 0$, τότε $\sqrt{4x^2} =$ $i)\ 2x$ $ii)\ 4x$ $iii) -2x$ $iv) -4x$

(β) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} =$ $i)\ 6$ $ii)\ \sqrt[3]{6}$ $iii)\sqrt[6]{6}$ $iv)\sqrt[6]{108}$

(γ) Αν $x > 0$, τότε $\sqrt[5]{\sqrt{x^{15}}} =$ $i)\ x^3$ $ii)\ x^5$ $iii) x\sqrt{x}$ $iv) x^2\sqrt{x}$

(δ) $Η\ εξίσωση\ x^{\frac{1}{2}} = 5$, $\chi > 0$, $έχει\ λύση\ το$: $i)\ 5$ $ii)\ 25$ $iii)\sqrt{5}$ $iv) -5$

(ε) Αν $a > 0$, τότε $a^{-\frac{4}{5}} =$ $i)\ \sqrt[5]{\alpha^4}$ $ii)\ \sqrt[5]{\frac{1}{\alpha^4}}$ $iii)\sqrt[4]{\alpha^5}$ $iv)\sqrt[4]{\frac{1}{\alpha^5}}$

8. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο < , = , > , ώστε οι σχέσεις να είναι αληθείς. Να φαίνονται τα βήματα. (10 μον.)

(α) $5^{\frac{3}{4}}$ ... $6^{\frac{3}{4}}$

(β) $0{,}7^{-\frac{1}{2}}$ ... $0{,}9^{-\frac{1}{2}}$

(γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{8}{7}}$ ... $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{8}{7}}$

(δ) $\sqrt[3]{4}$ ... $\sqrt[4]{5}$

ΜΕΡΟΣ Β:

1. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή και όπου είναι δυνατό να γίνουν οι απλοποιήσεις:

(α) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{2^2}} =$ (β) $\dfrac{6}{1-\sqrt{3}} =$ (γ) $\dfrac{5}{3\sqrt{5}-\sqrt{15}} =$

(δ) $\dfrac{3}{5\sqrt[4]{3}} =$ (ε) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{19}}{2\sqrt{5}-\sqrt{19}} =$ (στ) $\dfrac{\sqrt{\psi}+\sqrt{\chi}}{\psi\sqrt{\chi}+\chi\sqrt{\psi}} =$

2. Να κάνετε τις πράξεις και να μετατρέψετε τις παραστάσεις στην πιο απλή τους μορφή:

(α) $\sqrt[3]{\chi^2}\ \sqrt[4]{\chi^3} =$ (β) $27^{\frac{2}{3}} \cdot 32^{\frac{3}{5}} \cdot 16^{\frac{1}{4}} =$

(γ) $\sqrt[4]{87-\sqrt{34+\sqrt[5]{29+\sqrt[3]{27}}}} =$ (δ) $\sqrt{2\alpha+\beta-\sqrt{3\alpha\beta}} \cdot \sqrt{2\alpha+\beta+\sqrt{3\alpha\beta}} =$

(ε) $3\sqrt{48}-2\sqrt{5}\ \sqrt{10}+5\sqrt{27}-\sqrt{8} =$ (στ) $\sqrt[3]{\sqrt{134}-\sqrt{9}}\ \ \sqrt[3]{\sqrt{134}+\sqrt{9}} =$

3. Να γίνουν οι πράξεις:

(α) $\left(\sqrt{\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta}}-\sqrt{\alpha+\beta-\sqrt{2\alpha\beta}}\right)^2 =$

(β) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2-3\sqrt{3}(2\sqrt{3}-4) =$

4. Να αποδειχθούν οι πιο κάτω ισότητες:

(α) $\dfrac{1}{\sqrt{\chi}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{\chi}+3}=\dfrac{5\chi+\sqrt{\chi}-18}{(\chi-4)(\chi-9)}$

(β) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{10}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{5-\chi}=3$ β) $\sqrt{2\chi+3}=5$ γ) $\sqrt[3]{5\chi-1}=4$ δ) $\sqrt[4]{4-\chi}=3$

ε) $\sqrt[4]{3-4\chi}=-4$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^3+27=0$ β) $\chi^4-81=0$ γ) $\chi^6-64\chi^2=0$

7. Να κάνετε τις πράξεις και τα αποτελέσματα να τα φέρετε στη μορφή $\alpha+\beta\sqrt{\kappa}$.

(α) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$ (β) $\left(2+3\sqrt{5}\right)^2$ (γ) $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$

(δ) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{27}\right)\cdot\left(\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108}\right)$ (ε) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}$

8. Να δείξετε ότι $\sqrt[5]{5}<\sqrt[3]{3}$

9. Να αποδείξετε ότι: $A=\sqrt{9}\cdot(\sqrt{2}+1)\cdot(1-\sqrt{2})=-3$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Gamma=\frac{1}{\left(5-\sqrt{7}\right)^2}-\frac{1}{\left(5+\sqrt{7}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{81}$$

10. Να λύσετε την εξίσωση: (α) $\sqrt{2x+1}=3$ (β) $\sqrt{x+2}=\sqrt{8-x}$

11. Αν $\dfrac{2}{\sqrt{10}}\cdot B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ να υπολογίσετε την τιμή του Β.

12. Να εξετάσετε αν η παράσταση: $3x^2-\sqrt{\sqrt{16x^4}}$ με $x\geq 0$ ισούται με

Α. x^2 Β. $5x^2$ Γ. x Δ. 2x Ε. καμία (να δώσετε την σωστή)

13. Αν $x=\sqrt{2}+1$ και $y=1-\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$M=x^2-4xy+y^2$

14. Δίνονται οι αριθμοί , $\alpha=\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $\beta=\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ και $\gamma=\sqrt{2\sqrt{x}}$, όπου x και y θετικοί ακέραιοι με $x>y$.

(α) Αν $x-y=1$, να δείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=1$

(β) Να διατάξετε τους αριθμούς α^2, β^2 και γ^2 από το μικρότερο στο μεγαλύτερο

(γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{1}{\gamma^2}$, $\dfrac{1}{\alpha^2-\beta^2}$ και να βρείτε τον μεγαλύτερο