

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση.

i. Η γωνιά 60° είναι ίση με:

A. $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

B. $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

Γ. $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$

Δ. $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

E. $\pi \text{ rad}$

ii. Από τις παρακάτω τιμές δεν μπορεί να είναι συνημίτονο γωνιάς η:

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Γ. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δ. -1

E. -2

iii. Αν $\eta\mu \theta < 0$ και $\epsilon\phi \theta < 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνιάς θ βρίσκεται:

A. στο 1° τεταρτημόριο B. στο 2° τεταρτημόριο Γ. στο 3° τεταρτημόριο Δ. στο 4° τεταρτημόριο

iv. Αν $A = 3\sigma\upsilon\upsilon\theta - 1$, τότε η ελάχιστη τιμή του A είναι:

A. -2

B. 2

Γ. -1

Δ. -4

E. 4

v. Αν A, B, Γ είναι γωνίες τριγώνου, τότε το $\eta\mu(B+\Gamma)$ ισούται με:

A. -1

B. $\eta\mu B + \eta\mu \Gamma$

Γ. $-\eta\mu A$

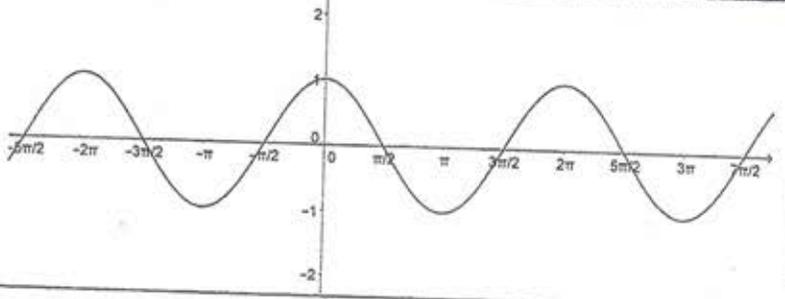
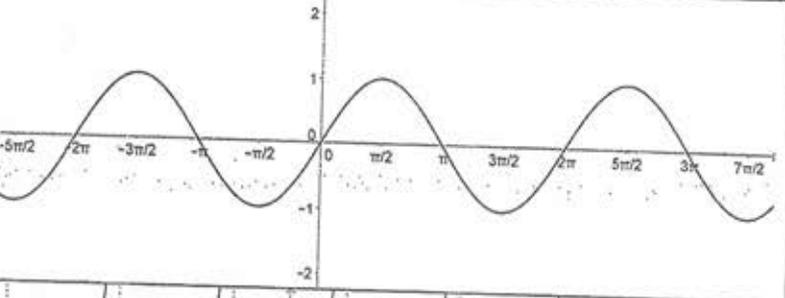
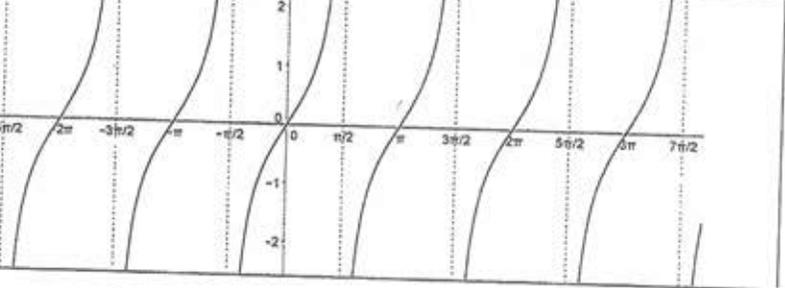
Δ. $\eta\mu A$

E. 0

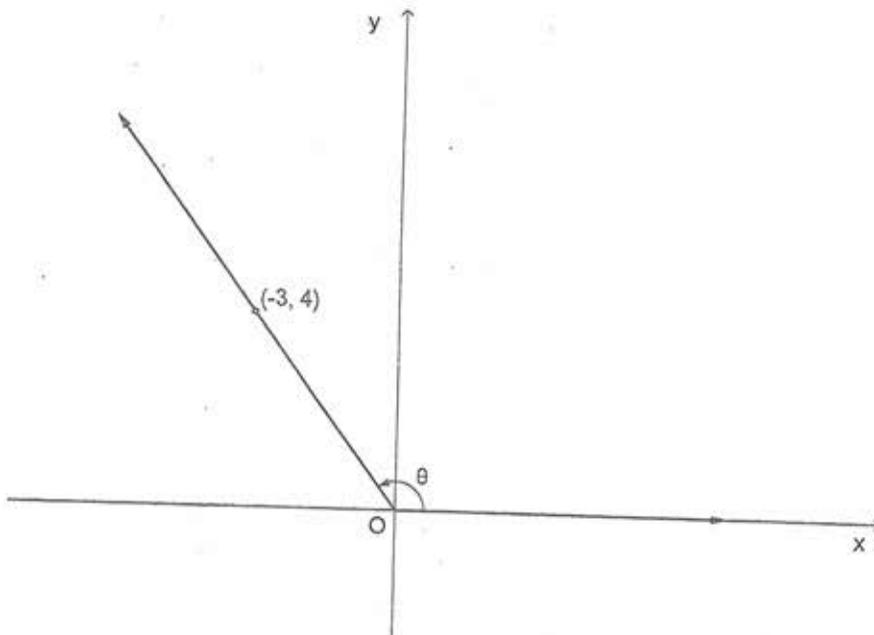
2. Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να σημειώσετε αν είναι *Σωστή* ή *Λάθος*.

A/A	Μαθηματική πρόταση	Σωστή ή Λάθος.
1	Ο άξονας των y στον τριγωνομετρικό κύκλο ονομάζεται άξονας των συνημιτόνων	
2	Η γωνία $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$ ισούται με 36°	
3	Υπάρχει γωνία θ τέτοια ώστε $\epsilon\phi\theta = 1,01$	
4	Ο τριγωνομετρικός αριθμός αριθμός $\sigma\tau\epsilon\mu 750^\circ$ είναι θετικός	
5	$\epsilon\phi 16^\circ \cdot \sigma\phi 16^\circ = 1$	
6	Η τελική πλευρά της γωνιάς -299° βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο	
7	$\eta\mu^2 150^\circ + \sigma\upsilon\upsilon^2 30^\circ = 1$	
8	Αν $\epsilon\phi\theta > 0$ και $\sigma\tau\epsilon\mu\theta > 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνιάς θ βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο	
9	$\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta$	
10	Αν $\sigma\upsilon\upsilon\theta = 1$ τότε $\sigma\upsilon\upsilon 2\theta = 2$	

3. Για κάθε μία από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις να σημειώσετε την αντίστοιχη τριγωνομετρική συνάρτηση και την αντίστοιχη περίοδο.

Γραφική παράσταση	Τριγωνομετρική συνάρτηση	Περίοδος
		
		
		

4. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνιάς θ .



5. Αν ισχύει $\text{csc}\theta = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3\sigma\phi\theta - 5\eta\mu\theta}{4\tau\epsilon\mu\theta}$$

6. Αν ισχύει $\eta\mu\theta = -\frac{12}{13}$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5\epsilon\phi\theta - 13\sigma\upsilon\upsilon\theta}{12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

7. Αν ισχύει $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{10\eta\mu\omega - 8\tau\epsilon\mu\omega}{3\sigma\phi\omega}$$

8. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

$$(\alpha) (\sigma\upsilon\upsilon\theta - \eta\mu\theta)^2 = 1 - 2\sigma\upsilon\upsilon\theta \cdot \eta\mu\theta$$

$$(\beta) \sigma\upsilon\upsilon(90^\circ - \omega) + \frac{\sigma\upsilon\upsilon^2\omega}{1 + \eta\mu(180^\circ - \omega)} = 1$$

$$(\gamma) \frac{1}{\eta\mu^2\theta} - \frac{1}{\epsilon\phi^2\theta} = 1$$

$$(\delta) \eta\mu^2\theta \cdot (1 + \sigma\phi^2\theta) + \sigma\upsilon\upsilon^2\theta \cdot (1 + \epsilon\phi^2\theta) = 2$$

$$(\epsilon) \epsilon\phi\theta + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\theta}{1 + \eta\mu\theta} = \tau\epsilon\mu\theta$$

$$(\sigma\tau) \frac{\epsilon\phi\theta - \sigma\phi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\tau\epsilon\mu\theta} = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\upsilon\theta$$

$$(\zeta) \frac{\sigma\phi\theta \cdot (1 - \eta\mu^2\theta)}{\sigma\phi\theta + \sigma\upsilon\upsilon\theta} = 1 - \eta\mu\theta$$

$$(\eta) \frac{\tau\epsilon\mu\theta - \epsilon\phi\theta}{\sigma\upsilon\upsilon\theta} = \frac{1}{1 + \eta\mu\theta}$$

$$(\theta) \eta\mu^4\theta - \sigma\upsilon\upsilon^4\theta = 2\eta\mu^2\theta - 1$$

$$(\iota) \frac{(1 + \epsilon\phi\theta)^2}{\tau\epsilon\mu\theta \cdot \eta\mu\theta} = \tau\epsilon\mu\theta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\theta + 2$$

$$(\kappa) (\epsilon\phi\theta - \eta\mu\theta)^2 + (1 - \sigma\upsilon\upsilon\theta)^2 = (\tau\epsilon\mu\theta - 1)^2$$

$$\frac{\eta\mu\theta - 2\eta\mu^3\theta}{2\sigma\upsilon\nu^3\theta - \sigma\upsilon\nu\theta} = \epsilon\phi\theta$$

9. (α) Αν $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, να δείξετε ότι $\eta\mu\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}$.

10. Αν $A = \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta}$ και $0 < \theta < \pi$.

- Να δείξετε ότι οι ποσότητες $1+\sigma\upsilon\nu\theta$ και $1-\sigma\upsilon\nu\theta$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί.
- Να δείξετε ότι $A^2 = 2 - 2\eta\mu\theta$
- Να βρείτε τις τιμές του θ ώστε να ισχύει η σχέση $A^2 = 1$ στο διάστημα $(0, \pi)$

11. Αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu(\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi-\omega) \cdot \eta\mu(2\pi-\omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\sigma\phi(5\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)} = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}$$

12. Αν $90^\circ < \chi < 180^\circ$ και $\frac{\eta\mu(\chi-90^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ+\chi) \cdot \eta\mu(270^\circ-\chi)}{\epsilon\phi(-\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ-\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\chi)} = -\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την γωνία χ .

13. Αν $-\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ και $\frac{\eta\mu(\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi-\omega) \cdot \eta\mu(2\pi-\omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{\sigma\phi(5\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)} = \frac{1}{2}$, να

υπολογίσετε τη γωνιά $\hat{\omega}$.

14. Να αποδείξετε ότι:

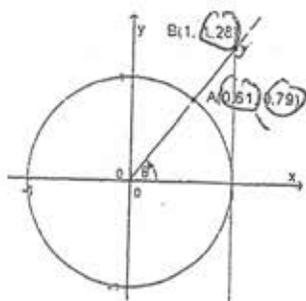
(α) $\frac{\eta\mu(\pi+\theta) \cdot \epsilon\phi(\pi-\theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(3\pi-\theta)}{\tau\epsilon\mu(-\theta) \cdot \sigma\phi\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi+\theta)} = 1$

(β) $1 + \frac{2\eta\mu(\pi-\theta)}{2-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{2+\eta\mu\theta}{2-\eta\mu\theta}$

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq \frac{2+\eta\mu\theta}{2-\eta\mu\theta} \leq 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1) Τα σημεία A και B είναι τα σημεία τομής της τελικής πλευράς της γωνίας θ με τον τριγωνομετρικό κύκλο και με την ευθεία $x=1$ αντίστοιχα. Να βρείτε το ημίτονο, συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας θ .



2) α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2\eta\mu\theta = \sqrt{2}$ στο διάστημα $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\eta\theta = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ στο διάστημα $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

3) Αν $\epsilon\phi(180^\circ + \omega) - 2\sigma\phi(90^\circ + \omega) = 5\sigma\phi(270^\circ - \omega) - 6$, να υπολογίσετε την $\epsilon\phi\omega$.

4) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu 210^\circ \cdot \sigma\upsilon\eta 315^\circ}{\epsilon\phi 225^\circ \cdot \sigma\upsilon\eta(-60^\circ) \cdot \eta\mu 315^\circ}$.

5) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 220^\circ \cdot \epsilon\phi 100^\circ \cdot \eta\mu 120^\circ}{\sigma\upsilon\eta 130^\circ \cdot \sigma\phi 190^\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Να φαίνονται όλα τα στάδια των πράξεων σας.

6) Αν $\frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\phi(-\omega) - \tau\epsilon\mu(270^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(360^\circ - \omega)}{\epsilon\phi(90^\circ + \omega) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \omega)} = \frac{3}{2}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνιά ω .

7) Αν $\epsilon\phi\omega = \frac{4}{3}$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{4\sigma\phi\theta - 5\eta\mu\theta}{3\tau\epsilon\mu\theta}$$

8) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες

$$\text{(α)} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} - \epsilon\varphi\theta = \tau\epsilon\mu\theta$$

$$\text{(β)} \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \eta\mu\chi}{\tau\epsilon\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\varphi^3\chi$$

$$\text{(γ)} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\epsilon\varphi\alpha}{1+\epsilon\varphi^2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$$

$$\text{(δ)} (1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)(1 + \tau\epsilon\mu\alpha) = \eta\mu\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha$$

$$\text{(ε)} \frac{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$$

$$\text{(στ)} 1 - \frac{\eta\mu^2\theta}{(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)} = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\text{(ζ)} \frac{(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 - 1}{\epsilon\varphi\chi - \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi} = 2\sigma\varphi^2\chi$$

9) (α) Αν η γωνία θ βρίσκεται σε κανονική θέση στον τριγωνομετρικό κύκλο και το σημείο που η τελική πλευρά της τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο έχει τετμημένη $x = -\frac{1}{2}$ και τεταγμένη θετική, να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 5\text{cm}$, $B\Gamma = 13\text{cm}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\epsilon\phi\beta$, $\sigma\phi\Gamma$.

2. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνιάς θ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$

β) $\epsilon\phi\theta = \frac{5}{12}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$

3. Αν $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{10\tau\epsilon\mu\theta - 12\sigma\phi\theta}{13\sigma\upsilon\nu\theta}$$

4. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α) $(1 - \eta\mu^2\alpha)(\epsilon\phi^2\alpha + 1) = 1$

β) $\frac{\epsilon\phi\omega - \sigma\phi\omega}{\tau\epsilon\mu\omega - \sigma\tau\epsilon\mu\omega} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$

γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha = 1$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\eta\mu 150^\circ \epsilon\phi 300^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ}{\eta\mu 100^\circ \sigma\upsilon\nu 240^\circ}$$

6. Να αποδείξετε τις πιο κάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\eta\mu(90^\circ - \alpha)} = \sigma\phi\alpha$

β) $\frac{\epsilon\phi(180^\circ + \chi)\eta\mu(-\chi)}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \chi)\eta\mu(180^\circ - \chi)\sigma\phi(90^\circ + \chi)} = \sigma\upsilon\nu\chi$

7. Να υπολογίσετε τη γωνιά ω , αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + \omega)\epsilon\phi(90^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega)\sigma\phi(180^\circ - \omega)} = \frac{1}{2}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

1) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$K_1 = \eta\mu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ + \eta\mu^2 225^\circ + \epsilon\phi 60^\circ \sigma\upsilon\nu 210^\circ =$$

$$K_2 = \eta\mu(270 + \theta) + \eta\mu(180 - \theta) + \eta\mu(90 + \theta) + \eta\mu\theta =$$

$$K_3 = \eta\mu 300^\circ - \sigma\phi 405^\circ + \eta\mu 315^\circ \eta\mu 30^\circ + 2\epsilon\phi 330^\circ \sigma\upsilon\nu 390^\circ =$$

$$K_4 = \eta\mu(-60^\circ) - \sigma\upsilon\nu 210^\circ + 3\epsilon\mu 315^\circ \eta\mu 405^\circ =$$

2) Να αποδείξετε ότι

$$K_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu(90 - \alpha)}{\sigma\phi(90 + \alpha)} + \frac{\eta\mu(180 - \alpha)}{\epsilon\phi(180 - \alpha)} = -2\sigma\upsilon\nu\alpha \quad K_2 = \frac{\sigma\phi(180 + \alpha)}{\eta\mu(90 - \alpha)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(270 + \alpha)}{\epsilon\phi(270 - \alpha)} = \epsilon\phi\alpha$$

$$K_3 = \eta\mu(90 + \theta) \cdot \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu(90 + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0 \quad K_4 = \frac{\epsilon\phi(180 - \theta)}{\sigma\upsilon\nu(180 + \theta)} \cdot \frac{\eta\mu(270 + \theta)}{\epsilon\phi(270 + \theta)} = \epsilon\phi^2\theta$$

$$K_5 = \frac{\eta\mu(180 - \theta)}{\epsilon\phi(180 + \theta)} \cdot \frac{\sigma\phi(90 - \theta)}{\epsilon\phi(90 + \theta)} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu(360 - \theta)}{\eta\mu(-\theta)} = \eta\mu\theta \quad K_6 = \frac{\eta\mu^2(\theta - 270) \cdot \sigma\upsilon\nu(360 - \theta)}{\epsilon\phi^2(\theta - 90) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\theta - 270)} = \sigma\upsilon\nu\theta$$

3) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180 + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\alpha)}{\eta\mu(-\alpha) \cdot \eta\mu(90 + \alpha)}, \quad \frac{\eta\mu(-\alpha) \cdot \sigma\phi(-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(360 - \alpha) \cdot \epsilon\phi(180 + \alpha)}$$

$$\frac{\eta\mu(180 - \phi) \cdot \sigma\upsilon\nu(360 - \phi)}{\epsilon\phi(180 - \phi) \cdot \sigma\upsilon\nu(180 - \phi)}, \quad \frac{\eta\mu(180 + \alpha) \cdot \eta\mu(360 + \alpha)}{\epsilon\phi(180 + \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(270 + \alpha)}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180 - \beta) + \sigma\upsilon\nu(90 - \beta)}{\eta\mu(360 - \beta) - \eta\mu(270 - \beta)}, \quad \frac{\eta\mu(180 - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu(180 + \alpha)} \cdot \frac{\eta\mu(270 + \alpha)}{\epsilon\phi(270 + \alpha)}$$

$$\frac{\eta\mu^2(180 - \theta) + \eta\mu^2(90 - \theta)}{\eta\mu(180 - \theta)} =$$

4) Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

5) Αν $\epsilon\phi\theta = -\frac{5}{12}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta + 5\sigma\phi\theta}{26\eta\mu\theta}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 5\text{cm}$, $B\Gamma = 13\text{cm}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma$, $\epsilon\phi B$, $\sigma\phi\Gamma$.

2. Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνιάς θ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$

β) $\epsilon\phi\theta = \frac{5}{12}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$

3. Αν $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{10\tau\epsilon\mu\theta - 12\sigma\phi\theta}{13\sigma\upsilon\nu\theta}$$

4. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α) $(1 - \eta\mu^2\alpha)(\epsilon\phi^2\alpha + 1) = 1$

β) $\frac{\epsilon\phi\omega - \sigma\phi\omega}{\tau\epsilon\mu\omega - \sigma\tau\epsilon\mu\omega} = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega$

γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha = 1$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\eta\mu 150^\circ \epsilon\phi 300^\circ \sigma\upsilon\nu 10^\circ}{\eta\mu 100^\circ \sigma\upsilon\nu 240^\circ}$$

6. Να αποδείξετε τις πιο κάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\eta\mu(90^\circ - \alpha)} = \sigma\phi\alpha$

β) $\frac{\epsilon\phi(180^\circ + \chi)\eta\mu(-\chi)}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \chi)\eta\mu(180^\circ - \chi)\sigma\phi(90^\circ + \chi)} = \sigma\upsilon\nu\chi$

7. Να υπολογίσετε τη γωνιά ω , αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + \omega)\epsilon\phi(90^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega)\sigma\phi(180^\circ - \omega)} = \frac{1}{2}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\frac{\sqrt{2}\eta\mu 45^\circ + 3\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \sqrt{3}\eta\mu 60^\circ}{2\eta\mu 30^\circ}$ χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής.
2. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .
3. Αν $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{13\sigma\upsilon\nu\theta - 5\epsilon\phi\theta}{12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$
4. Αν $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{10\sigma\upsilon\nu(-\theta)}{8\sigma\phi\theta - 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$
5. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{3}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{12\sigma\phi\theta - 15\eta\mu\theta}{18\epsilon\phi\theta}$
6. Αν $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B = \frac{10\eta\mu\omega - 8\tau\epsilon\mu\omega}{3\sigma\phi\omega}$
7. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{5}{13}$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{10\epsilon\phi\theta - 13\eta\mu\theta}{-24\sigma\phi\theta}$
8. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(1 + \sigma\phi^2\theta)\eta\mu^2\theta = 1$
9. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(1 + \epsilon\phi^2\omega)\sigma\upsilon\nu^2\omega + (1 + \sigma\phi^2\omega)\eta\mu^2\omega = 2$
10. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $1 - \frac{\eta\mu^2\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} = -\sigma\upsilon\nu\chi$
11. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\epsilon\phi\alpha \cdot \tau\epsilon\mu\alpha - \eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \epsilon\phi^2\alpha$
12. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\epsilon\phi\chi \cdot \eta\mu^2\chi}{\epsilon\phi\chi - \eta\mu\chi} = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi$
13. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} + \epsilon\phi\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$
14. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} - \sigma\phi\theta = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$
15. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} = 2\epsilon\phi\alpha$
16. Να αποδείξετε τη ταυτότητα: $(\sigma\phi\theta + \sigma\tau\epsilon\mu\theta)^2 = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}$, $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 1$
17. Να αποδείξετε τη τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{\epsilon\phi\omega}{1 + \sigma\phi^2\omega} + \sigma\phi\omega \cdot \eta\mu^2\omega = \epsilon\phi\omega$
18. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega - \eta\mu^3\omega}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\phi\omega - \sigma\upsilon\nu^3\omega} = \sigma\phi\omega$
19. Να αποδείξετε τη σχέση: $\frac{\sigma\phi\chi\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu^3\chi}{\epsilon\phi\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu^3\chi} = \epsilon\phi\chi$
20. Να δείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα: $\frac{\sigma\phi\chi(1 - \eta\mu^2\chi)}{\sigma\phi\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = 1 - \eta\mu\chi$
21. Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $\frac{\eta\mu 200^\circ \cdot \epsilon\phi 190^\circ \cdot \eta\mu 300^\circ}{\sigma\upsilon\nu 110^\circ \cdot \sigma\phi 100^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ , αν
 α) $\varepsilon\phi\theta < 0$ και $\tau\epsilon\mu\theta < 0$,
 β) $\sigma\phi\theta > 0$ και $\sigma\tau\epsilon\mu\theta < 0$
2. Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα =, >, <.
 α) $\eta\mu x \dots \frac{3}{2}$ β) $\varepsilon\phi 26^\circ \cdot \varepsilon\phi 64^\circ \dots 1$ γ) $\sigma\phi 285^\circ \cdot \sigma\tau\epsilon\mu 130^\circ \dots 0$
 δ) $\sigma\upsilon\nu 19^\circ \dots \eta\mu 71^\circ$ ε) $\sigma\upsilon\nu 145^\circ \dots \frac{\sqrt{2}}{2}$ στ) $\tau\epsilon\mu 73^\circ \dots \tau\epsilon\mu 250^\circ$
3. Να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης:
 α) $3 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sqrt{3} \cdot \eta\mu 60^\circ - 2 \cdot \eta\mu 90^\circ + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ - 5 \cdot \sigma\phi 45^\circ =$
 β) $\frac{\eta\mu 180^\circ + \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \sqrt{3} \cdot \varepsilon\phi 30^\circ}{2 \cdot \eta\mu 30^\circ + 3 \cdot \eta\mu 270^\circ} =$
4. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$ να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .
5. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:
 α) $\frac{\sigma\phi x}{1 + \sigma\phi^2 x} = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
 β) $\sigma\phi^2 \omega - \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \sigma\upsilon\nu^2 \omega \cdot \sigma\phi^2 \omega$
 γ) $\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)} + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu x)} = 2 \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x \cdot \tau\epsilon\mu x$
 δ) $(\tau\epsilon\mu\alpha + \varepsilon\phi\alpha - 1) \cdot (\tau\epsilon\mu\alpha - \varepsilon\phi\alpha + 1) = 2 \cdot \varepsilon\phi\alpha$
6. Αν $7 \cdot \varepsilon\phi\phi + 11 = 8 + 3\varepsilon\phi\phi$ και $\tau\epsilon\mu\phi < 0$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = \frac{10 \cdot \eta\mu\phi - 9 \cdot \sigma\phi\phi}{8 \cdot \tau\epsilon\mu\phi}$
7. Αν $\frac{\eta\mu(180 + \chi) \cdot \varepsilon\phi(90 - \chi) \cdot \eta\mu(-\chi)}{\varepsilon\phi(180 - \chi) \cdot \sigma\upsilon\nu(180 + \chi)} = -\frac{1}{2}$ και $180^\circ < \chi < 270^\circ$, να βρεθεί η γωνία χ .
8. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\phi(-\theta) \cdot \tau\epsilon\mu(90 + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(270 - \theta) \cdot \sigma\phi(270 + \theta)} = -1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Χαρακτηρίστε τις πιο κάτω ισότητες με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ:

		ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
i	$\sin 230^\circ < 0$	
ii	$\eta\mu 38^\circ = \sigma\upsilon\nu 52^\circ$	
iii	$\eta\mu\alpha = \frac{1}{\tau\epsilon\mu\alpha}$	
iv	$\frac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$	
v	$\sigma\upsilon\nu^2 \omega = \eta\mu^2 \omega - 1$	
vi	$\sigma\phi 150^\circ = \epsilon\phi 30^\circ$	

2. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{12}{13}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης, χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\omega + 36\sigma\phi\omega}{10\epsilon\phi\omega}$$

3. Να αποδείξετε τις πιο κάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

i. $\tau\epsilon\mu\omega - \eta\mu\omega \cdot \epsilon\phi\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$

ii. $(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega) \cdot (1 + \sigma\phi^2\omega) = 1$

iii. $\frac{\eta\mu(180^\circ + \omega) - \epsilon\phi(270^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(90^\circ - \omega)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) \cdot \sigma\phi(360^\circ - \omega)} = -\sigma\tau\epsilon\mu\omega \cdot \tau\epsilon\mu\omega$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας ω , αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και ισχύει ότι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}{\eta\mu(270^\circ + \omega)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. Αν το σημείο $K(5, -12)$, βρίσκεται πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω , να βρείτε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

6. Να βρείτε σε πιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά των γωνιών:

- α) 50° β) -60° γ) 470° δ) -100°

7. Να βρείτε δύο γωνίες που έχουν την ίδια τελική πλευρά με καθεμιά από τις πιο κάτω γωνίες:

- α) 160° β) $-\frac{\pi}{6}$

8. Αν $\text{τεμ}\theta = -\frac{13}{12}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

9. Να αποδείξετε τις ταυτότητες :

α) $\text{συν}^2\theta - \eta\mu^2\theta = 1 - 2\eta\mu^2\theta$

β) $\text{συν}\omega \cdot \epsilon\phi\omega + \eta\mu\omega \cdot \sigma\phi\omega = \eta\mu\omega + \text{συν}\omega$

10. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\frac{\text{συν}150^\circ \cdot \sigma\phi 240^\circ}{\eta\mu 300^\circ \cdot \epsilon\phi 225^\circ \cdot \text{τεμ}315^\circ}$$

$$\frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi(-\theta) \cdot \text{τεμ}(90 + \theta)}{\text{συν}(\theta - 270) \cdot \sigma\phi(270 + \theta)}$$

11. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση στο διάστημα $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

$$2\text{συν}x = \sqrt{2}$$

12. Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi(-\theta) \cdot \text{τεμ}(90^\circ + \theta)}{\text{συν}(270^\circ - \theta) \cdot \sigma\phi(270^\circ + \theta)} = -1$

13. Αν $\frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu(180 - x) \cdot \eta\mu(270 - x)}{\epsilon\phi(-x) \cdot \text{συν}(180 + x) \cdot \text{συν}(-x)} = -\frac{1}{2}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$, να βρεθεί η γωνία x

14. Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$\frac{\text{συν}(180^\circ - \omega) \cdot \text{συν}(180^\circ + \omega) - \text{συν}(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(360^\circ - \omega)}{\eta\mu(180^\circ - \omega) - \text{συν}(90^\circ - \omega) + \epsilon\phi(180^\circ + \omega)} = \sigma\phi\omega$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

[1] Να υπολογίσετε τη γωνία $\theta \in (0^\circ, 180^\circ)$ στις πιο κάτω περιπτώσεις :

α) $\eta\mu(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

[2] Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών :

α) 150°

β) -135°

γ) 240°

[3] Να αποδείξετε ότι :

$$\sigma\upsilon\nu(+\alpha) + \eta\mu(\pi - \alpha) + \eta\mu(-\alpha) + \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = 0$$

[4] Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής) :

$$A = \frac{\eta\mu 250^\circ \sigma\phi 225^\circ \eta\mu 390^\circ}{\epsilon\phi 45^\circ \sigma\upsilon\nu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 200^\circ}$$

$$B = \frac{2\eta\mu 30^\circ - 4\sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2\epsilon\phi 45^\circ}$$

$$\Gamma = \eta\mu 120^\circ \sigma\upsilon\nu 300^\circ \epsilon\phi \frac{4\pi}{3}$$

$$\Delta = 4\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \epsilon\phi 135^\circ + \epsilon\phi 30^\circ + 4\sigma\phi 120^\circ$$

$$E = \frac{\eta\mu 210^\circ \sigma\upsilon\nu 315^\circ}{\eta\mu(-45^\circ) \epsilon\phi 135^\circ}$$

[5] Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 10\eta\mu\omega + 9\epsilon\phi\omega + 3\tau\epsilon\mu\omega$$

[6] Αν $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 13\sigma\upsilon\nu\omega - 24\epsilon\phi\omega - 12\tau\epsilon\mu\omega$$

[7] Αν $\varepsilon\varphi\omega = -\frac{4}{3}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$

α) Να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{5\sigma\upsilon\nu\omega - 4\sigma\tau\epsilon\mu\omega}{4\sigma\varphi\omega}$

[8] Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α) $\varepsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \eta\mu\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

β) $\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = \varepsilon\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta$

γ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \varepsilon\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha$

δ) $\frac{(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 - 1}{\varepsilon\varphi\chi - \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi} = 2\sigma\varphi^2\chi$

ε) $\frac{\sigma\varphi\chi - \varepsilon\varphi\chi}{\sigma\tau\epsilon\mu\chi + \tau\epsilon\mu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi$

στ) $\frac{1}{\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\sigma\varphi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta + \sigma\varphi\theta} = 2\sigma\varphi^2\theta$

ζ) $\frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\varphi(90^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\varepsilon\varphi(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu(-\theta)} = \eta\mu\theta$

[9] Να δείξετε ότι η παράσταση $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi}{\eta\mu(90^\circ - \chi) + \eta\mu(180^\circ - \chi)} - \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu(-\chi)$ είναι ανεξάρτητη του χ .

[10] Αν $0^\circ < \theta < 90^\circ$ και ισχύει $\frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2} + \theta)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία θ .

[11] Αν $\chi = 1 + \eta\mu\theta$, $\psi = 1 - \sigma\upsilon\nu\theta$ και ισχύει $\chi^2 + \psi^2 = 3$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$, να δείξετε ότι $\theta = 45^\circ$.

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑΙ!!!